PROBABILITÉS FINIES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** On truque un dé en alourdissant la face du 1 : de cette façon, la face 1 a deux fois plus de chance de finir sous le dé que celles qui lui sont adjacentes (faces 2,3,4,5) et 3 fois plus de chance que la face 6. Déterminez la probabilité d'obtenir un nombre impair avec un tel dé.

***2)** Montrez qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $[\![1,n]\!]$ telle que pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}([\![1,k]\!])$ soit proportionnelle à k^2.

***3)** Parmi les deux expériences suivantes, laquelle est la plus probable ? Modélisez chacune d'elles et concluez.

a) On jette quatre dés et on obtient au moins un 6.

b) On jette 24 fois deux dés et on obtient au moins un double 6.

***4)** Une agence de voyages propose des circuits touristiques comprenant 5 capitales européennes parmi les 12 plus grandes. Un circuit ne passe qu'une seule fois par une capitale donnée et l'ordre dans lequel les capitales sont visitées importe.

L'agence met en jeu un exemplaire de chaque circuit touristique pour assurer sa promotion. Jean-Eudes a eu de la chance et a reçu un billet gagnant : il va retirer son lot...

a) Modélisez la situation. Combien y-a-t-il de circuits proposés ?

b) Quelle est la probabilité que Jean-Eudes ait gagné un circuit commençant par Berlin ?

c) Jean-Eudes est un vrai parisien qui connaît parfaitement sa ville. Quelle est la probabilité qu'il soit un peu déçu ?

d) Quelle est la probabilité qu'il passe par Paris, puis plus tard par Londres ?

***5)** On considère un jeu de cartes numérotées de 1 à n. Il y a une carte numérotée 1, deux cartes numérotées 2, etc. On tire une carte au hasard.

Calculez la probabilité p_i que la carte porte le numéro i (pour $i \in [\![1,n]\!]$). Calculez la probabilité que la carte ait un numéro strictement supérieur à m (pour $m \in [\![1,n]\!]$).

***6)** Un sac contient 26 jetons contenant les 26 lettres de l'alphabet.

a) On tire simultanément 5 jetons du sac. Modélisez la situation. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux voyelles ? D'avoir au moins une voyelle ?

b) On tire successivement 5 jetons du sac sans remise. Modélisez la situation. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux voyelles ? D'avoir au moins une voyelle ?

c) On tire successivement 5 jetons du sac avec remise. Modélisez la situation. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux voyelles ? D'avoir au moins une voyelle ? D'avoir au moins deux lettres identiques ?

***7)** Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20 % des femmes fument ainsi que 40 % des hommes.

a) Modélisez la situation.

b) Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer ?

c) Une personne quitte la réunion en fumant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

***8)** Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

▷ pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris ;

▷ pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a) Montrez que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

b) Déterminez la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c) Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

***9)** Chaque soir, Jean-Eudes et Marie-Chantal jouent aux cartes. Quand les deux joueurs jouent honnêtement, chacun gagne avec la probabilité $0,5$. Mais il arrive que de temps en temps l'un triche, indépendamment de l'autre. Marie-Chantal triche rarement : une fois sur six ; Jean-Eudes triche une fois sur trois. Quand les deux trichent, Marie-Chantal gagne 3 fois sur 5. Si Marie-Chantal triche et Jean-Eudes joue honnêtement, Marie-Chantal gagne toujours. Quand Jean-Eudes triche et Marie-Chantal joue honnêtement, Jean-Eudes gagne 3 fois sur 4.

a) Quelle est la probabilité que Jean-Eudes gagne ce soir ?

b) Hier, Marie-Chantal a perdu. Quelle est la probabilité que Jean-Eudes ait triché ?

***10)** On lance deux dés équilibrés.

a) Soit A l'événement « un dé marque 1 » et B l'événement « la somme des points marqués par les deux dés vaut 7 ». Montrez que A et B ne sont pas indépendants.

b) On suppose maintenant qu'on peut distinguer les deux dés : l'un est blanc, l'autre noir par exemple. Soit A' l'événement « le dé blanc marque 6 ». Montrez que A' et B sont indépendants.

****11)** Aux échecs, une tour peut prendre toute pièce située sur la même ligne ou colonne, mais pas en diagonale. On place deux tours au hasard sur un échiquier vide ($n \times n$ cases). Modélisez la situation et calculez la probabilité que les deux tours ne puissent pas mutuellement se prendre.

****12)** On considère un groupe de n personnes dont on regarde la date d'anniversaire (en supposant qu'aucune n'est née le 29 février).

a) Modélisez la situation et calculez la probabilité pour qu'au moins deux personnes fêtent leur anniversaire le même jour.

b) À partir de quel n cette probabilité est-elle supérieure à $0,5$?

****13)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'urne n°i contient i boules numérotées de 1 à i.

On choisit d'abord une urne au hasard, puis on tire une boule dans cette urne. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculez la probabilité d'obtenir une boule numérotée i.

****14)** On lance n fois une pièce équilibrée ($n \geqslant 2$). On considère les événements A « tous les lancers donnent le même résultat » et B « au plus un lancer donne "face" ».

a) Montrez que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{n+1}{2^n}$.

b) Calculez $\mathbb{P}(A \cap B)$.

c) Montrez que A et B sont indépendants pour une unique valeur de n.

****15)** Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 2 boules blanches et n boules noires ; l'urne V contient n boules blanches et 2 boules noires. On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise.

On désigne par U l'événement : « on choisit l'urne U », par V l'événement : « on choisit l'urne V » et par B l'événement : »les deux boules tirées sont blanches ».

a) Calculez $\mathbb{P}(B)$.

b) Déterminez les entiers n tels que $\mathbb{P}_B(U) < \dfrac{1}{16}$.

****16)** Un fumeur cherche à arrêter de fumer. Il est tiraillé entre le manque de volonté et la mauvaise conscience : si un jour il est parvenu à ne pas fumer, alors il fume le lendemain avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$; s'il fume un jour, il fume le lendemain avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$. On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ème jour.

Calculez p_{n+1} en fonction de p_n, puis p_n en fonction de p_1 et n. Déterminez la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

****17)** On dispose de deux pièces : la pièce A donne "face" avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et la pièce B donne "face" avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$. On choisit une des deux pièces au hasard et on la lance. Si on obtient "face", on conserve la pièce, sinon on prend l'autre pièce ; puis on effectue un nouveau lancer. On répète cette opération *ad nauseam*.

On note A_n l'événement « au n-ème lancer, on lance la pièce A », et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

a) Montrez que la suite (p_n) est arithmético-géométrique et calculez p_n en fonction de n.

b) Calculez la probabilité d'obtenir "face" au n-ème lancer.

****18)** On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, telles que le k-ème contienne k boules blanches et $(n+1)-k$ boules bleues. On choisit au hasard l'urne n°k avec une probabilité proportionnelle à k, puis on tire une boule de l'urne choisie.

a) Calculez la probabilité de choisir chaque urne.

b) On a tiré une boule blanche. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculez la probabilité qu'elle soit issue de l'urne n°k.

c) On fait tendre le nombre d'urnes vers l'infini : que dire des probabilités précédentes ?

**19) Une urne U contient 1 boule blanche et 4 boules noires, et une urne V contient 4 boules blanches et 1 boule noire. On choisit une urne. On effectue deux tirages avec remise dans l'urne choisie. On note A l'événement "La première boule est blanche", B l'événement "La deuxième boule est noire".

a) Les événements A et B sont-ils indépendants pour la probabilité conditionnée par l'événement C : "Le tirage se fait dans l'urne U" ?

b) Déterminez $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

c) Le résultat suivant est-il vrai ?
Soient A, B et C trois événements tels que $\mathbb{P}(C) \neq 0$. Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, alors $\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)$.

d) Concluez : que peut-on dire de l'indépendance de deux événements ?

**20) On dispose de 2 dés A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit 1/3.

▷ Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dé A ;
▷ Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dé B.

a) Calculez la probabilité d'obtenir "rouge" au premier lancer de dés.

b) On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculez la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième lancer de dés.

c) On a obtenu "rouge" aux n premiers lancers de dés ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminez la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

d) Les événements « on obtient "rouge" au premier lancer de dés » et « on obtient "rouge" au deuxième lancer de dés » sont-ils indépendants pour le probabilité P ?

**21) On considère une suite de n lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0, 1[$).

On note F_i l'événement (associé à la propriété) « le i-ème lancer donne "face" ».

a) Soit R_k l'événement : « "pile" apparaît pour la première fois lors du lancer k ». Exprimez R_k à l'aide des événements F_i. Calculez $\mathbb{P}(R_k)$.

b) Soit A_k l'événement : « la séquence "pile, face" apparaît pour la première fois aux lancers $(k-1)$ et k ». Calculez $\mathbb{P}(A_k)$.

c) Quelle est la probabilité de l'événement A : « la séquence "pile, face" apparaît au moins une fois » ?

d) Soit B_k l'événement : « on a obtenu exactement k fois "pile" ». Calculer $\mathbb{P}(B_k)$.

**22) Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement des boules jusqu'à vider l'urne : si on tire une noire, on l'enlève, si on tire une blanche, on la retire, et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ?

**23) Un sac contient $2n$ jetons dont la moitié sont blancs et l'autre moitié sont noirs. On vide ce sac par tirages successifs sans remises de paires de jetons.

Soit A_k l'événement « au k-ème tirage, les deux jetons tirés sont de couleurs différentes » et A l'événement « on a obtenu des paires de jetons de couleurs différentes à chaque tirage ». On note $B_k = \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j$.

a) Calculez $\mathbb{P}(A_1)$.

b) Montrez que pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}_{B_k}(A_k) = \dfrac{2(n-k+1)^2}{2(n-k+1)((2(n-k+1)-1)}$

c) Montrez que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$.

**24) Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On tire au hasard, successivement et avec remise, k boules de cette urne. Pour $i \in \{1, \dots, k\}$, on note B_i l'événement (associé à la propriété) « le i-ème tirage donne une boule blanche ».

a) Que peut-on dire des événements $B_1, \dots, B_k$? Quelles sont leurs probabilités ?

b) Pour $i \in \{1, \dots, k\}$, soit C_i l'événement « on obtient la première boule blanche au i-ème tirage ». Exprimez C_i à l'aide des B_j. Calculez $\mathbb{P}(C_i)$.

c) Pour i tel que $0 \leqslant i \leqslant k$, soit A_i l'événement : « les k tirages donnent i boules blanches puis $k - i$ boules noires dans cet ordre ». Calculez $\mathbb{P}(A_i)$.

d) Quelle est la probabilité de l'événement (associé à la propriété) « les k tirages donnent d'abord des boules blanches, puis des boules noires » ?

e) On note $\lambda = \dfrac{b}{n}$, nombre mesurant la blancheur moyenne de l'urne : plus λ est proche de 0, plus l'urne semble noire. Exprimez les probabilités précédentes en fonction de λ.

****25)** On lance n fois une pièce équilibrée ($n \geqslant 2$). Calculez la probabilité de ne pas obtenir deux fois "pile" successivement de deux façons :

a) en introduisant les événements A_k associés à la propriété « le lancer n°k donne "pile" et le suivant donne "face" » ;

b) en notant p_n la probabilité demandée et en déterminant une relation de récurrence entre p_n, p_{n+1} et p_{n+2}.

Déduisez de cet exercice la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n-k}{k}$.

****26)** Un jeu de cartes contient n cartes distinctes. Une première personne choisit un certain nombre de cartes, note son tirage et remet les cartes dans le paquet. Une seconde personne choisit alors quelques cartes dans le paquet. Quelle est la probabilité que la deuxième personne ait choisi au moins les mêmes cartes que la première ? Quelle est la probabilité que la deuxième personne n'ait choisi aucune carte commune avec la première ?

****27)** On truque un dé en alourdissant la face du 1 : de cette façon, la face 1 a deux fois plus de chance de finir sous le dé que celles qui lui sont adjacentes (faces 2,3,4,5) et 3 fois plus de chance que la face 6. Déterminez la probabilité d'obtenir un nombre impair avec un tel dé (voir exercice 1).

On considère alors deux urnes A et B : l'urne A contient 4 boules blanches et 2 rouges, l'urne B contient 2 boules blanches et 4 rouges. On lance deux fois le dé précédent. Après chaque lancer du dé, si on obtient un nombre pair, on tire sans remise une boule dans l'urne A, sinon dans l'urne B.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche après le premier lancer ?

b) Soit X, Y, Z 3 événements tels que X et Y soient indépendants. Montrez que
$$\mathbb{P}_X(Z) = \mathbb{P}_{X\cap Y}(Z)\mathbb{P}(Y) + \mathbb{P}_{X\cap\overline{Y}}(Z)\mathbb{P}(\overline{Y}).$$

c) Quelle est la probabilité d'obtenir une deuxième boule blanche après en avoir obtenu une première venant de l'urne A ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches après les deux premiers lancers ?