Probabilités

Note : le cours de 1ère année se limite aux probabilités finies. Dans tout ce chapitre, même si ce n'est pas rappelé à chaque fois, on suppose que Ω est un ensemble fini.

1 Espace probabilisé

1.1 Modélisation d'une expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît les résultats possibles (les issues possibles) mais dont on ne peut connaître à l'avance le résultat. On modélise l'expérience par la donnée de l'ensemble Ω des issues possibles.

Définition. L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles (ou univers).

Exemples.
- On jette un dé non truqué : les issues possibles sont les 6 entiers $1, \ldots, 6$, l'univers est donc $\{1, \ldots, 6\}$;
- On jette deux dés de couleur différente (un blanc, un rouge) et on note le résultat du tirage en donnant d'abord le nombre du blanc : l'univers des possibles est $\{1, \ldots, 6\}^2$;
- On jette deux dés indiscernables et on note le résultat du tirage en donnant d'abord le nombre le plus petit : les issues possibles forment l'ensemble $\{(a, b) \in \{1, \ldots, 6\}^2 \ / \ a \leqslant b\}$;
- On tire 3 cartes d'un jeu de 32 cartes : les issues possibles forment l'ensemble des parties à 3 éléments pris parmi les 32 cartes (cas typique des tirages sans remises et sans ordre) ;
- On considère les résultats d'un tiercé avec 20 partants : les issues possibles forment l'ensemble des arrangements de 3 numéros parmi les 20 (cas typique des tirages sans remise et avec ordre) ;
- On lance un pièce 5 fois d'affilée et on s'intéresse aux résultats possibles des 5 lancers : les issues possibles forment l'ensemble des 5-uplets d'éléments pris dans l'ensemble $\{0, 1\}$ (cas typique des tirages avec remise et ordre).

1.2 Événements

Une fois qu'on a déterminé l'univers, on modélise les propriétés que peut avoir le résultat de l'expérience aléatoire.

Définition. Un événement est une partie de l'univers.

En général, parmi tous les résultats possibles, on s'intéresse à ceux qui satisfont une propriété donnée. Autrement dit, la plupart du temps, les événements sont définis en compréhension : l'ensemble des résultats tels que ...

Exemples.
- On jette un dé non truqué : la propriété « le tirage est un nombre pair » définit l'événement $\{2, 4, 6\}$;
- On jette deux dés de couleur différente (un blanc, un rouge) : la propriété « le dé blanc donne la valeur 1 » définit l'événement $\{(1, a) \ / \ 1 \leqslant a \leqslant 6\}$;
- On jette deux dés indiscernables : la propriété « les deux dés donnent la même valeur » est associée à l'événement $\{(a, a) \ / \ 1 \leqslant a \leqslant 6\}$;
- On lance une pièce 5 fois : la propriété « 4 lancers donnent "pile" » est associée à l'événement $\{(1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1)\}$.
- On considère le tiercé ; la propriété « les chevaux gagnants portent les numéros $(4, 17, 2)$ » définit l'événement $\{(4, 17, 2)\}$.

Remarque. Souvent les propriétés ne sont pas « simples », comme « les 3 cartes sont 3 carreaux ou 3 piques », « le premier lancer donne "pile" et le troisième "face" », etc.

Il s'agit de traduire les phrases du langage courant en opérations sur les événements : on rappelle que
- si P, Q sont deux événements associés aux propriétés $p(x)$ et $q(x)$ (où x est une issue possible), alors l'événement associé à la propriété $p(x)$ ou $q(x)$ est l'événement $P \cup Q$;
- celui associé à la propriété $p(x)$ et $q(x)$ est l'événement $P \cap Q$;
- celui associé à la propriété non $p(x)$ est l'événement $\overline{P}$, appelé événement contraire (ou complémentaire) ;

— si $\forall x \in \Omega \quad p(x) \Rightarrow q(x)$, alors $P \subset Q$ (et réciproquement).

L'événement Ω est appelé l'événement certain, l'événement $\varnothing$ est appelé l'événement impossible.
Si $a \in \Omega$, on appelle événement élémentaire l'événement $\{a\}$.

Définition. Deux événements A et B sont dits incompatibles quand ils sont disjoints, *i.e.* $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire quand les propriétés associées ne peuvent pas être réalisées en même temps.

On dit qu'un événement est réalisé quand le résultat de l'expérience aléatoire appartient à l'événement.

Remarque. On prendra garde aux conseils suivants :
- ne pas confondre événement et issue ; un événement n'est pas un élément de Ω, mais une partie de Ω ;
- se méfier des définitions en français des événements, car il est courant de parler d'un événement défini par une phrase (événement au sens concret) qui ne permet pas de définir clairement un événement de la modélisation (au sens mathématique) ; l'exemple typique est le cas de l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce et à considérer la suite des deux lancers : l'événement concret « on obtient "pile" » ne définit pas clairement un événement mathématique (faut-il comprendre "au premier lancer" ? "au moins une fois" ? etc).

Exercices **:**

1) On tire trois cartes simultanément d'un tas de cartes numérotées de 1 à n. Modélisez la situation (*i.e.* choisissez un ensemble Ω). On note A_i l'événement "la carte numéro i a été tirée" : définissez A_i dans votre modélisation. Vérifiez que les phrases suivantes définissent des événements en les exprimant à l'aide des A_i.
   - On obtient une carte de numéro inférieur à 3.
   - On obtient trois cartes consécutives.
   - La carte de numéro maximal est de numéro au moins $n/2$.
2) On lance n fois une pièce et on considère la suite des n résultats des lancers. Modélisez la situation. On note P_i l'événement « on obtient "pile" au lancer num. i » : définissez P_i dans votre modélisation. Vérifiez que les phrases suivantes définissent des événements en les exprimant à l'aide des P_i.
   - On obtient au moins une fois "pile".
   - On obtient "pile" exactement deux fois.
   - Chaque "pile" est suivi d'un "face".
   - On obtient plus de "pile" que de "face".

1.3 Probabilités sur un ensemble fini

Une fois qu'on connaît les issues possibles de l'expérience aléatoire, il faut modéliser l'idée que certains événements ont plus de chance de survenir. On leur attribue donc un nombre compris entre 0 et 1 : plus le nombre est proche de 1, plus l'événement a de chances de survenir. Évidemment, on ne peut pas attribuer n'importe quel nombre n'importe comment...

Définition. On appelle probabilité sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- pour tout couple $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, si $A \cap B = \varnothing$, alors $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

1.4 Propriétés

Proposition 1. *Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un ensemble fini Ω. Alors $\mathbb{P}$ vérifie les propriétés suivantes :*
- ▷ *pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; en particulier $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;*
- ▷ *pour tout couple $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$;*
- ▷ *pour tout couple $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;*
- ▷ *pour toute famille $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$, si les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.*

On remarque alors que pour définir $\mathbb{P}$, il suffit de la définir sur les événements élémentaires.

Définition. Soit Ω un ensemble fini. On appelle distribution de probabilités sur Ω toute famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ telle que :

— pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega \in \mathbb{R}_+$;

— $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

Proposition 2. *Soit Ω un ensemble fini et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités sur Ω. Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.*

2 Exemples

2.1 Probabilité uniforme

L'exemple le plus simple de probabilité est la probabilité uniforme sur Ω : pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on pose

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$$

On vérifie que $\mathbb{P}$ ainsi définie est bien une probabilité sur Ω.
Cette modélisation est adaptée quand les événements élémentaires sont équiprobables, c'est-à-dire qu'ils ont la même chance d'arriver : dans ce cas, $\mathbb{P}(\{a\}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$.

Remarque. Dans un problème, quand la probabilité n'est pas définie clairement, en général on suppose l'équiprobabilité des événements élémentaires, autrement dit que la probabilité est la probabilité uniforme. Le choix de telle ou telle probabilité n'est pas « mathématique » : ce choix est fait pour que la modélisation donne des résultats conformes à la statistique de l'expérience.

2.2 Pièce truquée

Une pièce équilibrée définit la probabilité uniforme sur l'univers $\Omega = \{0, 1\}$: $\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{2}$.
Si la pièce est truquée et favorise le côté "pile", alors on peut avoir $\mathbb{P}(\{0\}) = p$, $\mathbb{P}(\{1\}) = 1 - p$ où p est un réel compris entre $\dfrac{1}{2}$ et 1.

2.3 Probabilité triviale

Soit RG l'ensemble des participants à un célèbre tournoi de tennis. L'un des éléments de RG est noté RN : on définit la fonction $\mathbb{P}$ de $\mathscr{P}(RG)$ dans $[0, 1]$ par $\mathbb{P}(A) = 1$ quand $RN \in A$ et $\mathbb{P}(A) = 0$ sinon. $\mathbb{P}$ est une probabilité sur RG, qui permet de répondre à des questions simples : quelle est la probabilité qu'un espagnol gagne le tournoi ? la probabilité que le vainqueur ait déjà gagné 10 fois le tournoi ? etc

2.4 Somme de deux dés

L'expérience aléatoire consiste ici à lancer deux dés et à relever la somme des deux. L'univers est donc l'ensemble $\{2, \ldots, 12\}$. Mais ici la probabilité n'est pas uniforme : il y a beaucoup plus de chance d'obtenir une somme égale à 7 qu'à 2.

Pour obtenir 2 (comme pour obtenir 12), il n'y a qu'un seul lancer possible : $\mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{12\}) = \dfrac{1}{36}$,
alors que pour obtenir 7, il y a 6 lancers possibles : $\mathbb{P}(\{7\}) = \dfrac{6}{36}$.
De même, $\mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{11\}) = \dfrac{2}{36}$, $\mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{10\}) = \dfrac{3}{36}$, $\mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{9\}) = \dfrac{4}{36}$ et $\mathbb{P}(\{6\}) = \mathbb{P}(\{8\}) = \dfrac{5}{36}$.
On a défini ici la probabilité sur les événements élémentaires grâce à la donnée d'une distribution de probabilités (remarque : la somme vaut bien 1).

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Généralités

Définition. Un événement est dit négligeable quand sa probabilité est nulle.

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A un événement non négligeable.

Pour $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on pose $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, appelé probabilité sachant A de B.

L'idée intuitive derrière la notion de probabilité conditionnelle est que lorsqu'on dispose d'une information partielle sur le résultat de l'expérience, notre perception des probabilités s'en trouve modifiée.

Théorème 1. *Sous les mêmes hypothèses, $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur Ω, appelée probabilité conditionnelle à A.*

Pour montrer ce théorème, on rappelle d'abord le résultat suivant :

Proposition 3. *Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Alors*

$$\begin{array}{rcl} A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ \complement_E(A \cap B) & = & \complement_E A \cup \complement_E B \\ \complement_E(A \cup B) & = & \complement_E A \cap \complement_E B \end{array}$$

En général, on connaît plutôt $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}(A)$, ce qui permet de calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$$

On peut généraliser

Théorème 2 (Formule des probabilités composées)**.**
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_2 \cap A_1}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

En général, on utilise ce résultat lorsque des événements (au sens naturel) se succèdent et que la connaissance de chaque événement permet de déterminer l'état du système.

Exercices :

3) On dispose d'une urne contenant 1 boule blanche et n boules noires ($n \geqslant 1$). On effectue une suite de tirages jusqu'à obtenir la boule blanche en respectant le protocole suivant : si on tire une boule noire, on la remplace par deux boules noires. Calculez la probabilité d'obtenir la boule blanche à l'issue du k-ème tirage.

3.2 Systèmes complets d'événements

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements si et seulement si

— les événements sont deux à deux incompatibles :
pour tout couple $(i, j) \in I^2$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \varnothing$;

— $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Exemples.

— Si A est un événement, le couple $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
— La famille de tous les événements élémentaires est un système complet d'événements.

Les systèmes complets d'événements interviennent lorsqu'on est tenté de faire une disjonction de cas : on est dans un cas, ou alors dans un autre, etc mais sans que jamais deux cas soient simultanément possibles.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors on a $\displaystyle\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i) = 1$, **mais la réciproque est fausse**, même si les événements sont deux à deux disjoints (il peut manquer des parties de probabilités nulles). Quand on manipule des univers finis à notre niveau, c'est plutôt rare, mais dans des univers infinis, ce cas est courant.

Par exemple, on modélise une suite potentiellement infinie de lancers d'une pièce par une suite finie ou infinie de 0 et de 1 et on considère l'expérience suivant : on lance la pièce jusqu'à obtenir deux lancers consécutifs identiques. Les événements A, B associés aux propriétés « la suite de lancers se termine sur deux "piles" consécutifs » et « la suite de lancers se termine sur deux "faces" consécutifs » ne forment pas un système complet d'événements, bien que $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) = 1$ et $A\cap B = \varnothing$, car le complémentaire de $A\cup B$ est l'ensemble des 2 suites qui alternent à chaque lancer "pile" et "face" : cet ensemble est non vide (et pourtant de probabilité nulle).

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 3. *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements.*

Alors pour tout événement B, $\displaystyle\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(B\cap A_i)$

Si de plus, tous les événements A_i sont de probabilités non nulles, alors $\displaystyle\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$.

On peut se représenter la situation grâce à un arbre pondéré.

3.4 Formule de Bayes

Proposition 4. *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.*

Alors $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Cette formule est appelée la formule de probabilité des causes.

On déduit de cela et de la formule des probabilités totales la formule de Bayes.

Théorème 4. *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements non négligeables.*

Alors pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a $\mathbb{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{j\in I}\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}(B)}$.

Remarque. L'énoncé est donné ici dans sa pleine version, mais en pratique, on retrouve la formule à chaque fois en refaisant la démonstration dans le cas qui nous préoccupe.

Exercices :

4) Une maladie affecte statistiquement une personne sur 1000. Un test de dépistage permet de détecter la maladie avec une fiabilité de 99%, mais il y a 0.2% de chances que le test donne un faux positif (i.e. une personne est déclarée malade sans l'être).
   — Une personne est testée positivement. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?
   — Une personne est testée négativement. Quelle est la probabilité qu'elle soit quand même malade ?
   — Ce dépistage remplit-il son rôle ?

4 Indépendance

4.1 Indépendance de 2 événements

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A, B deux événements.
On dit A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 5. *Si A et B sont indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants, les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Remarque. ATTENTION ! Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles » !

Intuitivement, deux événements sont indépendants si le fait de savoir que l'un des deux est réalisé n'apporte aucune information sur le fait de savoir que l'autre le soit ou non : dans le cas où A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$. Et non pas, comme c'est souvent indiqué dans la littérature, le fait qu'un événement n'influe pas sur un autre ! Mais tout ça n'est que baratin. **Il faut se méfier de l'intuition quand on fait des calculs de probabilités.**

***Exercices* :**

5) Une famille a n enfants ($n \geqslant 2$). Quelle est la probabilité qu'il n'y ait que des enfants du même sexe ? Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 filles ? Montrez que ces deux événements sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

4.2 Indépendance mutuelle

Définition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements.
On dit les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont (mutuellement) indépendants si et seulement si pour tout sous-ensemble $J \subset I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$.

Le résultat précédent peut être généralisé.

Proposition 6. *Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements (mutuellement) indépendants, alors toute famille d'événements $(C_i)_{i \in I}$ où pour tout $i \in I$, on choisit $C_i = A_i$ ou $C_i = \overline{A_i}$ est aussi une famille d'événements mutuellement indépendants.*

Remarque. On s'intéresse rarement à des familles d'événements deux à deux indépendants seulement : cette notion n'implique pas l'indépendance mutuelle !
La seule notion vraiment utile est celle-ci, justement !

***Exercices* :**

6) On lance une pièce équilibrée n fois et on note le résultat des n lancers. Modélisez la situation. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathbb{P}_i$ l'événement associé à la propriété « on obtient 'pile' au i-ème lancer » : montrez que les événements $(\mathbb{P}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants.
7) Cette fois-ci la pièce est truquée et la probabilité qu'elle tombe sur 'pile' est égale à $p \in [0, 1]$. Calculez la probabilité d'un événement élémentaire.

Remarque. L'indépendance mutuelle d'un grand nombre d'événements est presque toujours une propriété postulée lors de la modélisation et rarement une propriété démontrée car c'est une preuve difficile en général.