DÉNOMBREMENTS - SOLUTIONS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

****1)** Le code de photocopies du lycée est constitué de 6 chiffres de 0 à 9. Calculez le nombre de codes :

a) en tout ;
b) dont tous les chiffres sont différents ;
c) n'ayant que deux chiffres apparaissant chacun trois fois ;
d) n'ayant que trois chiffres apparaissant chacun deux fois ;
e) ayant deux chiffres identiques et les quatre autres différents.

Une solution.

a) Un code est une 6-liste de $[\![0,9]\!]$. Donc l'ensemble des codes est $[\![0,9]\!]^6$, de cardinal $10^6 = 1\,000\,000$.

b) Un code sans chiffres identiques est un 6-arrangement de $[\![0,9]\!]$, donc le nombre de tels codes est $A_{10}^6 = \dfrac{10!}{4!} = 151\,200$.

c) On choisit d'abord les deux chiffres du code, c'est-à-dire une partie de 2 éléments de $[\![0,9]\!]$: on a $\dbinom{10}{2}$ choix,
puis on choisit les places du plus petit des deux chiffres, c'est-à-dire qu'on choisit 3 places parmi les 6 : on a $\dbinom{6}{3}$ choix,
et c'est fini, car l'autre chiffre est automatiquement placé.
On a donc $\dbinom{10}{2} \times \dbinom{6}{3} = 900$ codes à deux chiffres apparaissant chacun trois fois.

d) On choisit d'abord les trois chiffres du code, c'est-à-dire une partie de 3 éléments de $[\![0,9]\!]$: on a $\dbinom{10}{3}$ choix,
puis on choisit les places du plus petit des trois chiffres, c'est-à-dire qu'on choisit 2 places parmi les 6 : on a $\dbinom{6}{2}$ choix,
puis on choisit les places du second chiffre, c'est-à-dire qu'on choisit 2 places parmi les 4 restantes : on a $\dbinom{4}{2}$ choix,
et c'est fini, car le dernier chiffre est automatiquement placé.
On a donc $\dbinom{10}{3} \times \dbinom{6}{2} \times \dbinom{4}{2} = 10\,800$ codes à trois chiffres apparaissant chacun deux fois.

e) On choisit d'abord le chiffre qui sera répété deux fois : on a 10 choix,
puis les deux places de ce chiffre répété : on a $\dbinom{6}{2}$ choix,
puis pour la première place libre, on a 9 choix pour le chiffre (on ne reprend pas le précédent),
puis pour la deuxième place libre, on a 8 choix pour le chiffre (on ne reprend pas les précédents),
puis pour la troisième place libre, on a 7 choix pour le chiffre,
puis pour la dernière place libre, on a 6 choix pour le chiffre.
On a donc $10 \times \dbinom{6}{2} \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 75\,600$ codes.

****2)** On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

a) sans imposer de contraintes sur les cartes ?
b) contenant 5 carreaux ou 5 piques ?
c) 2 carreaux et 3 piques ?
d) au moins un roi ?
e) au plus un roi ?
f) 2 rois et 3 piques ?

Une solution.

a) Un tirage est une partie de 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes. L'ensemble des tirages est donc l'ensemble des 5-combinaisons d'un ensemble à 32 éléments, son cardinal est donc $\dbinom{32}{5} = 201\,376$.

b) Un tirage de 5 carreaux est une 5-combinaison de l'ensemble des 8 carreaux, donc il y en a $\dbinom{8}{5}$.
De même, le nombre de tirages de 5 piques est égal à $\dbinom{8}{5}$.
L'ensemble des tirages contenant 5 carreaux ou 5 piques est la réunion disjointe des deux ensembles précédents donc son cardinal est $2 \times \dbinom{8}{5} = 112$.

c) Pour définir un tirage contenant 2 carreaux et 3 piques, on choisit d'abord les 2 carreaux : on a donc $\binom{8}{2}$ choix, puis on choisit les 3 piques : on a $\binom{8}{3}$ choix.

On a donc $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1\,568$ tirages.

d) L'ensemble des tirages contenant au moins un roi est le complémentaire dans l'ensemble des tirages quelconques de celui des tirages sans roi. Celui-ci est l'ensemble des 5-combinaisons d'un ensemble de 28 cartes, il est donc de cardinal $\binom{28}{5}$.

Donc le nombre de tirages ayant au moins un roi est $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\,096$.

e) L'ensemble des tirages contenant au plus un roi est la réunion disjointe de l'ensemble des tirages sans roi et de celui des tirages avec exactement un roi. Le premier est de cardinal connu (voir ci-dessus).
Pour définir un tirage contenant exactement un roi, on choisit d'abord le roi : on a donc 4 choix, puis on choisit les 4 autres cartes parmi les 28 qui ne sont pas des rois : on a $\binom{28}{4}$ choix.

On a donc $4 \times \binom{28}{4}$ tirages avec un seul roi.

Le nombre de tirages avec au plus un roi est donc égal à $\binom{28}{5} + 4 \times \binom{28}{4} = 180\,180$.

f) Un tirage avec 2 rois et 3 piques contient ou pas le roi de pique. On distingue deux cas.
Pour définir un tirage avec 2 rois et 3 piques sans le roi de pique, on choisit d'abord les deux rois parmi les trois possibles : on a $\binom{3}{2}$ choix, puis on choisit les trois piques parmi les 7 possibles : on a $\binom{7}{3}$ choix. Donc il y a $\binom{3}{2} \times \binom{7}{3}$ tirages sans roi de pique.
Pour définir un tirage avec 2 rois et 3 piques avec le roi de pique, on choisit d'abord l'autre roi parmi les trois possibles : on a $\binom{3}{1}$ choix, puis on choisit les deux autres piques parmi les 7 possibles : on a $\binom{7}{2}$ choix, puis on choisit l'autre carte qui n'est ni un roi, ni un pique : 21 choix possibles. Donc il y a $\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times 21$ tirages avec roi de pique.

Le nombre de tirages avec 2 rois et 3 piques est donc égal à $\binom{3}{2} \times \binom{7}{3} + \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times 21 = 1\,428$.

****3)** Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. la boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules $4, 5, 6$ sont rouges, les autres sont vertes. On tire successivement et avec remise 5 boules. Le résultat d'un tel tirage est la liste des numéros des boules tirées. Déterminez le nombre de résultats :

a) en tout.

b) pour lesquels les cinq boules sont de la même couleur.

c) pour lesquels les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules.

d) pour lesquels la boule 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

Une solution.

a) Un résultat est une 5-liste de l'ensemble $[\![1, 10]\!]$. Il y a donc $10^5 = 10\,000$ résultats possibles.

b) On distingue les cas selon la couleur du tirage. Soit la couleur est jaune, on a donc une 5-liste de l'ensemble $[\![1, 1]\!]$, donc 1^5 choix. Soit la couleur est bleue, on a donc une 5-liste de l'ensemble $[\![2, 3]\!]$, donc 2^5 choix. Soit la couleur est rouge, on a donc une 5-liste de l'ensemble $[\![4, 6]\!]$, donc 3^5 choix. Soit la couleur est verte, on a donc une 5-liste de l'ensemble $[\![7, 10]\!]$, donc 4^5 choix.
Au total, il y a $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 = 1\,300$ tirages monochromes.

c) Pour définir un tirage où les quatre couleurs sont présentes, on distingue les cas selon la couleur qui apparaît deux fois.
• Soit le jaune apparaît deux fois, alors on choisit la position des deux boules jaunes parmi les 5 possibles : on a $\binom{5}{2}$ choix,
puis les positions des autres couleurs : 3 choix pour le bleu, 2 choix pour le rouge et donc la position du vert est connu,
puis on choisit les boules jaunes à placer dans les positions jaunes : 1^2 choix, puis la boule bleue : 2 choix, puis la rouge : 3 choix, puis la verte : 4 choix.

Il y a donc $\binom{5}{2} \times 3 \times 2 \times 1^2 \times 2 \times 3 \times 4$ choix pour un tirage avec deux jaunes et les autres couleurs.

• Soit le bleu apparaît deux fois, alors on choisit la position des deux boules bleues parmi les 5 possibles : on a $\binom{5}{2}$ choix,
puis les positions des autres couleurs : 3 choix pour le jaune, 2 choix pour le rouge et donc la position du vert est connu,
puis on choisit les boules bleues à placer dans les positions bleues : 2^2 choix, puis la boule jaune : 1 choix, puis la rouge : 3 choix, puis la verte : 4 choix.
Il y a donc $\binom{5}{2} \times 3 \times 2 \times 2^2 \times 1 \times 3 \times 4$ choix pour un tirage avec deux bleues et les autres couleurs.

• Soit le rouge apparaît deux fois, alors on choisit la position des deux boules rouges parmi les 5 possibles : on a $\binom{5}{2}$ choix,
puis les positions des autres couleurs : 3 choix pour le jaune, 2 choix pour le bleu et donc la position du vert est connu,
puis on choisit les boules rouges à placer dans les positions rouges : 3^2 choix, puis la boule jaune : 1 choix, puis la bleue : 2 choix, puis la verte : 4 choix.
Il y a donc $\binom{5}{2} \times 3 \times 2 \times 3^2 \times 1 \times 2 \times 4$ choix pour un tirage avec deux rouges et les autres couleurs.

• Soit le vert apparaît deux fois, alors on choisit la position des deux boules vertes parmi les 5 possibles : on a $\binom{5}{2}$ choix,
puis les positions des autres couleurs : 3 choix pour le jaune, 2 choix pour le bleu et donc la position du rouge est connu,
puis on choisit les boules vertes à placer dans les positions vertes : 4^2 choix, puis la boule jaune : 1 choix, puis la bleue : 2 choix, puis la rouge : 3 choix.
Il y a donc $\binom{5}{2} \times 3 \times 2 \times 4^2 \times 1 \times 2 \times 3$ choix pour un tirage avec deux vertes et les autres couleurs.

Au total, on a $\binom{5}{2} \times 3 \times 2 \times (1^2 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 \times 2^2 \times 3 \times 4 + 1 \times 2 \times 3^2 \times 4 + 1 \times 2 \times 3 \times 4^2) = 14\,400$ choix.

A posteriori, on remarque que ça fait $\binom{5}{2} \times 3 \times 2 \times (1 \times 2 \times 3 \times 4) \times (1+2+3+4) = \binom{5}{2} \times 3 \times 2 \times (1 \times 2 \times 3 \times 4) \times 10$.

Le facteur $\binom{5}{2} \times 3 \times 2$ est le nombre de choix des positions, le facteur $(1 \times 2 \times 3 \times 4)$ est le nombre de choix des boules pour avoir les 4 couleurs (une de chaque) et le dernier facteur 10 est le choix d'une dernière boule d'une couleur quelconque, ce qui donne bien deux boules de la même couleur et les autres de couleurs différentes.

d) On distingue des cas selon le nombre d'apparitions de la boule '8'.
Soit la boule '8' apparaît une fois : pour définir un tirage contenant une seule fois la boule '8' et deux boules rouges, on choisit d'abord la position du '8' : 5 choix, puis celle des deux boules rouges : $\binom{4}{2}$ choix, puis les deux boules rouges : 3^2 choix, puis les deux autres boules : 6^2 choix, donc au total $5 \times \binom{4}{2} \times 3^2 \times 6^2$ choix dans ce cas.
Soit la boule '8' apparaît deux fois : pour définir un tirage contenant deux fois la boule '8' et deux boules rouges, on choisit d'abord les positions des '8' : $\binom{5}{2}$ choix, puis celle des deux boules rouges : $\binom{3}{2}$ choix, puis les deux boules rouges : 3^2 choix, puis la dernière boule : 6 choix, donc au total $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times 3^2 \times 6$ choix dans ce cas.
Soit la boule '8' apparaît trois fois : pour définir un tirage contenant trois fois la boule '8' et deux boules rouges, on choisit d'abord les positions des '8' : $\binom{5}{3}$ choix, celle des rouges est alors connue, puis les deux boules rouges : 3^2 choix, donc au total $\binom{5}{3} \times 3^2$ choix dans ce cas.
Au total, on a donc $5 \times \binom{4}{2} \times 3^2 \times 6^2 + \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times 3^2 \times 6 + \binom{5}{3} \times 3^2 = 11\,430$ tirages contenant un '8' et deux boules rouges exactement.

****4)** On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

a) si les livres doivent être groupés par matières ?

b) si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés ?

Une solution.

a) On a 3 groupes de livres à ranger, donc 3! choix pour ordonner ces 3 groupes, puis à l'intérieur du groupe de math, il y 4! façons d'ordonner les 4 livres, puis dans celui de physique, 6! façons d'ordonner les 6 livres et enfin 3! façons d'ordonner les 3 livres du groupe de chimie. Au total, il y a donc $3! \times 4! \times 6! \times 3! = 622\,080$ façons de ranger les livres par groupes.

b) Il y a 13 livres à ranger dont les 4 de math successivement. On choisit d'abord la position du premier livre de math, les trois autres étant les suivants : 10 choix, puis on ordonne les 4 livres de math : 4! choix, puis on place les autres, ce qui revient à placer 9 livres dans 9 emplacements : il y a 9! choix. Au total, il y a $10 \times 4! \times 9! = 87\,091\,200$ tels rangements. De quoi s'occuper de longues heures si on aime le changement…