Dénombrements - exercice corrigé

Un réseau de téléphonie mobile comporte des numéros à 8 chiffres pris entre 0 et 9. Combien y-a-t-il de numéros de téléphone comprenant :

a) huit chiffres différents ?

b) exactement une fois le chiffre 0 et une fois le chiffre 1 ?

c) huit chiffres dont au moins un est pair ?

d) contenant les séquences 31, 46, 09 et 81 sans chevauchement ?

e) contenant un 0 au début ou à la fin ?

f) deux fois le 1, deux fois le 3, trois fois le 5 et une fois le 9 ?

g) deux chiffres seulement, chacun se répétant 4 fois ?

h) un chiffre apparaissant 4 fois, les autres une fois ?

i) huit chiffres formant une suite strictement croissante ?

Corrigé

a) Un numéro avec huit chiffres différents est un 8-arrangement de $[\![0,9]\!]$, donc il y a A_{10}^8 tels numéros. $A_{10}^8 = 10 \times 9 \times \ldots \times 3 = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$.

b) Pour définir un numéro contenant exactement une fois le chiffre 0 et une fois le chiffre 1,
d'abord on choisit la position du 0 : on a 8 choix
puis on choisit la position du 1 : on a 7 choix
enfin on choisit les 6 autres chiffres dans l'ensemble $[\![2,9]\!]$: pour chaque chiffre, on a 8 choix
On reconnaît la structure d'un principe multiplicatif : au total, le nombre de numéros est ici égal à $8 \times 7 \times 8^6 = 2^{21} \times 7$.

c) L'ensemble des numéros avec un chiffre pair au moins est le complémentaire de celui des numéros avec uniquement des chiffres impairs : celui-ci est de cardinal 5^8, puisque pour chaque chiffre, on a le choix dans $\{1,3,5,7,9\}$.
Le nombre total de numéros est 10^8 (ce sont des 8-listes de l'ensemble $[\![0,9]\!]$), donc le nombre de numéros dont au moins un chiffre est pair vaut : $10^8 - 5^8 = 5^8(2^8-1) = 5^8 \times 255 = 3 \times 5^9 \times 17$.

d) Les 4 séquences ont au total 8 chiffres, donc un numéro qui contient les 4 séquences est une permutation des 4 séquences : il y en a donc $4! = 24 = 2^3 \times 3$.

e) Le complémentaire de l'ensemble des numéros contenant un 0 au début ou à la fin est l'ensemble des numéros commençant et se terminant par un chiffre dans $[\![1,9]\!]$: on a donc **d'abord** 9 choix pour le premier chiffre, **puis** 9 pour le dernier, **puis** 10 choix pour les 6 autres, soit $9^2 \times 10^6$ numéros sans 0 au début ou à la fin.
Le nombre de numéros contenant un 0 au début ou à la fin est donc égal à : $10^8 - 9^2 \times 10^6 = 10^6 \times 19 = 2^6 \times 5^6 \times 19$.

f) Pour définir un numéro contenant deux fois le 1, deux fois le 3, trois fois le 5 et une fois le 9,
d'abord on choisit la position des deux 1, c'est-à-dire un ensemble de deux positions parmi les huit possibles : il y a donc $\binom{8}{2}$ choix pour la position des 1
puis on choisit la position des deux 3, c'est-à-dire un ensemble de deux positions parmi les six restantes : il y a donc $\binom{6}{2}$ choix pour la position des 3
puis on choisit la position des trois 5, c'est-à-dire un ensemble de trois positions parmi les quatre restantes : il y a donc $\binom{4}{3}$ choix pour la position des 5
enfin on choisit la position du chiffre 9 : il ne reste plus qu'un seul choix possible.
Donc le nombre de numéros contenant deux fois le 1, deux fois le 3, trois fois le 5 et une fois le 9 est égal à $\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{3} \times 1 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} \times \frac{6 \times 5}{1 \times 2} \times 4 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$.

g) Pour définir un numéro contenant deux chiffres seulement, chacun se répétant 4 fois,
d'abord on choisit les deux chiffres parmi les dix possibles : on a $\binom{10}{2}$ choix possibles
puis on choisit les positions du plus petit des deux, c'est-à-dire un ensemble de quatre positions parmi les huit possibles : on a $\binom{8}{4}$ choix possibles
enfin on place le deuxième chiffre dans les quatre autres positions restantes : on n'a plus qu'un choix évidemment.
Donc le nombre de numéros contenant deux chiffres seulement, chacun se répétant 4 fois, est égal à $\binom{10}{2} \times \binom{8}{4} = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$.

h) Pour définir un numéro contenant un chiffre apparaissant 4 fois, les autres une fois,
d'abord on choisit le chiffre apparaissant 4 fois parmi les dix possibles : on a 10 choix possibles
puis on choisit les positions de ce chiffre, c'est-à-dire un ensemble de quatre positions parmi les huit possibles : on a $\binom{8}{4}$ choix possibles
puis on choisit un autre chiffre qu'on place dans la première place vacante : on a 9 choix
puis on choisit un autre chiffre qu'on place dans la deuxième place vacante : on a 8 choix
puis on choisit un autre chiffre qu'on place dans la troisième place vacante : on a 7 choix
enfin on choisit un autre chiffre qu'on place dans la dernière position libre : on a 6 choix.
Donc le nombre de numéros contenant un chiffre apparaissant 4 fois, les autres une fois, est égal à $10 \times \binom{8}{4} \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2$.

i) Pour définir une suite de 8 chiffres strictement croissantes, on choisit d'abord les 8 chiffres parmi les 10 possibles, puis on les ordonne : il y a donc $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$ choix possibles pour les 8 chiffres, puis une seule façon de les ordonner. On obtient donc $3^2 \times 5$ numéros contenant huit chiffres formant une suite strictement croissante.