DÉNOMBREMENTS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Dans un lycée de 1500 étudiants, on a le choix entre les deux langues vivantes "anglais" et "allemand", que ce soit en première ou deuxième langue. La première langue est obligatoire, la seconde facultative. 1462 étudiants font de l'anglais, 1067 font de l'allemand.

a) Combien y-a-t-il d'étudiants qui pratiquent les deux langues ?

b) Combien n'ont pas de seconde langue ? Parmi ceux-ci, combien ont choisi l'anglais ?

c) Parmi ceux qui ont choisi deux langues vivantes, il y en a 95 de plus en anglais-LV1 qu'en allemand-LV1. Combien y-a-t-il d'étudiants qui ont choisi l'anglais en première langue et l'allemand en seconde ?

***2)**

a) Soit A, B, C trois ensembles finis. Montrez que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

b) Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

***3)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y-a-t-il de triplets $(x, y, z) \in [\![0, n]\!]$ tels que $xyz = 0$?

***4)** On répartit n boules dans 3 sacs numérotés (chaque sac peut contenir de 0 à n boules). Une répartition est un triplet (x_1, x_2, x_3) tel que x_i soit le nombre de boules dans le sac numéro i. Déterminez le nombre de répartitions :

a) en tout.

b) telles que le sac 1 soit vide.

c) telles que le sac 1 soit le seul sac vide.

d) telles qu'un sac et un seul soit vide.

e) telles qu'aucun sac ne soit vide.

f) telles qu'au moins un sac soit vide.

***5)** Une course oppose 20 concurrents.

a) Combien y-a-t-il de podiums possibles ?

b) On souhaite récompenser les 5 premiers en leur offrant à chacun un même livre. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

***6)**

a) Calculez le nombre d'anagrammes des mots "math", "chimie", "sciences".

b) Soit $n, k_1, \ldots, k_p$ des entiers naturels non nuls tels que $k_1 + \ldots + k_p \leqslant n$. Justifiez que $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!}$ est un entier naturel.

****7)** Le code de photocopies du lycée est constitué de 6 chiffres de 0 à 9. Calculez le nombre de codes :

a) en tout.

b) dont tous les chiffres sont différents.

c) n'ayant que deux chiffres apparaissant chacun trois fois.

d) n'ayant que trois chiffres apparaissant chacun deux fois.

e) ayant deux chiffres identiques et les quatre autres différents.

****8)** On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

a) sans imposer de contraintes sur les cartes ?

b) contenant 5 carreaux ou 5 piques ?

c) 2 carreaux et 3 piques ?

d) au moins un roi ?

e) au plus un roi ?

f) 2 rois et 3 piques ?

****9)** Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. la boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules $4, 5, 6$ sont rouges, les autres sont vertes. On tire successivement et avec remise 5 boules. Le résultat d'un tel tirage est la liste des numéros des boules tirées. Déterminez le nombre de résultats :

a) en tout.

b) pour lesquels les cinq boules sont de la même couleur.

c) pour lesquels les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules.

d) pour lesquels la boule 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

****10)** On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

a) si les livres doivent être groupés par matières ?

b) si on cherche seulement à grouper les livres de mathématiques ?

****11)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On travaille ici sur les écritures en base 10.

a) Combien y-a-t-il d'entiers non nuls à k chiffres ?

b) Combien y-a-t-il d'entiers non nuls à k chiffres dont l'écriture en base 10 ne contient pas le chiffre 9 ?

c) Soit u_k la somme des inverses des entiers non nuls ayant moins de k chiffres et dont l'écriture en base 10 ne contient pas le chiffre 9. Montrez que cette suite u est majorée et convergente.

****12)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La décomposition primaire de n est $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ où les p_i sont des nombres premiers et les α_i des entiers strictement positifs.

a) Combien y-a-t-il de couples $(d, e) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = de$?

b) Combien y-a-t-il de couples $(d, e) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = de$ et $d \wedge e = 1$?

c) Combien y-a-t-il de triplets $(d, e, f) \in \mathbb{N}^3$ tels que $n = def$ et d, e, f premiers entre eux 2 à 2 ?

d) Combien y-a-t-il de triplets $(d, e, f) \in \mathbb{N}^3$ tels que $n = def$?

e) Combien y-a-t-il de triplets $(d, e, f) \in \mathbb{N}^3$ tels que $n = def$ et d, e, f premiers entre eux dans leur ensemble ?

****13)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si k est un entier non nul, on note $S(n, k)$ le nombre de k-uplets $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$.

a) Montrez la relation de récurrence : $S(n, k+1) = \sum_{j=0}^{n} S(n-j, k)$.

b) Montrez que la somme $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+k}{k}$ est une somme télescopique (indication : triangle de Pascal).

c) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $S(n, k) = \binom{n+k-1}{k-1}$.

****14)** Soit A, B deux ensembles disjoints à p et q éléments respectivement. Soit $E = A \cup B$. Soit $n \in [\![0, p+q]\!]$.

a) En dénombrant le nombre de parties à n éléments de E, justifiez l'égalité suivante :

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$$

b) Déterminez la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

****15)** Une involution d'un ensemble E est une application $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Si E est de cardinal $n \geqslant 1$, on pose u_n le nombre d'involutions de E. Calculez u_1, u_2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n$.

****16)** Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et E un ensemble à kn éléments. Combien y-a-t-il de partitions de E en k parties à n éléments ?

****17)** Soit E une partie finie de $\mathbb{C}^*$, non vide et stable par multiplication. Pour $a \in E$ et $x \in E$, on pose $\varphi_a(x) = ax$.

a) Montrez que pour tout $a \in E$, φ_a est une application de E dans E, puis qu'elle est bijective.

b) Montrez que $1 \in E$.

c) Montrez que pour tout $x \in E$, $\dfrac{1}{x} \in E$. Que peut-on dire de l'ensemble E ?

d) Montrez que pour tout $x \in E$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k = 1$. Les éléments de E sont donc tous de module 1.

e) Soit $n = \operatorname{card} E$. On écrit les $n-1$ éléments de E autres que 1 sous la forme $x_p = e^{i\theta_p}$ de sorte que $0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{n-1} < 2\pi$.

Montrez que pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{\theta_p}{\theta_1}$ est un entier naturel.

f) On note $\omega = e^{i\theta_1}$. Justifiez que $E = \{\omega^p \ / \ p \in \mathbb{N}\}$ et justifiez l'existence d'un entier naturel non nul minimal N tel que $\omega^N = 1$.

g) Montrez que $E = \{\omega^p \ / \ p \in [\![0, N-1]\!]\}$ puis que $n = N$.

h) Justifiez que $E = \mathbb{U}_n$, ensemble des racines n-èmes de l'unité.

****18)** Soit A un anneau fini commutatif. Montrez que si A est intègre, alors A est un corps.

****19)** Montrez que parmi 7 réels quelconques tous différents, il en existe 2 notés b et c tels que $bc \neq -1$ et $0 < \dfrac{b-c}{1+bc} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

****20)** Soit $(G, .)$ un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G.

a) On définit une relation sur G : $a \sim b \iff \exists y \in H \quad b = ay$.

Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.

b) Montrez que la classe d'équivalence d'un élément a de G est l'ensemble $aH = \{ax \ / \ x \in H\}$. Quel est le cardinal d'une classe d'équivalence ?

c) Soit N le nombre de classes d'équivalence, montrez que $N \times \operatorname{card} H = \operatorname{card} G$.

On a donc démontré le th. de Lagrange : le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.

****21)** Soit $(G, .)$ un groupe fini, e son neutre et N son cardinal. Soit x un élément de $G - \{e\}$.

a) Montrez qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^p = e$.

b) On appelle ordre de x, noté $\omega(x)$, le plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que $x^p = e$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrez l'équivalence : $x^n = e \iff \omega(x) \mid n$.

c) Soit $H = \{x^k \ / \ k \in [\![0, \omega(x)-1]\!]\}$. Montrez que H est un sous-groupe de G.

d) Montrez que $\omega(x)$ divise N (utiliser l'exercice précédent).

*****22)** Soit E un ensemble à n éléments.

a) Calculez $\displaystyle\sum_{A \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{card} A$.

b) Calculez le nombre de couples de parties (X, Y) de E telles que $X \cap Y = \varnothing$.

c) Calculez le nombre de couples de parties (X, Y) de E telles que $X \subset Y$.

d) Calculez le nombre de couples de parties (X, Y) de E telles que $X \cap Y$ est un singleton.

*****23)** Si a est un entier naturel non nul, on pose $E(a) = [\![0, a-1]\!]$ et on définit l'application $r_a : \mathbb{Z} \to E(a)$ en posant $r_a(n)$ le reste de la division euclidienne de n par a.

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $a \wedge b = 1$. Pour $n \in E(ab)$, on pose $f(n) = (r_a(n), r_b(n))$.

a) Montrez que f est une bijection de $E(ab)$ dans $E(a) \times E(b)$.

b) On veut expliciter la réciproque de f. Pour cela, on choisit deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. Déterminez deux entiers X et Y tels que $X \equiv 1 \ [a]$, $X \equiv 0 \ [b]$ et $Y \equiv 1 \ [b]$, $Y \equiv 0 \ [a]$.

À l'aide de ces deux entiers, construisez la réciproque de f.

*****24)** Soit $n \geqslant 2$. On considère n points sur un cercle tels que trois cordes reliant les points ne soient jamais concourantes. Combien y-a-t-il de points d'intersection de cordes à l'intérieur du cercle ?

*****25)** Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et x un réel.

a) Soit $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ (appelée fonction partie fractionnaire). Montrez qu'il existe deux entiers différents k et ℓ dans $[\![0, N]\!]$ tel que $|f(kx) - f(\ell x)| \leqslant \dfrac{1}{N}$.

b) Montrez qu'il existe un rationnel $\dfrac{p}{q}$ tel que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \dfrac{1}{qN}$ et $q < N$.

*****26)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y-a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$? de $[\![1, n+2]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$? de $[\![1, n+3]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?