Dénombrement

1 Préambule

Le cours qui suit tourne autour de la notion de nombre d'éléments d'un ensemble et tente d'en donner une définition rigoureuse.

En début d'année, le principe de récurrence a été fondé sur cette notion intuitive de cardinal, car on a prouvé la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ en utilisant le fait que si une partie de $\mathbb{N}$ non vide ne possédait pas de minimum, alors on pourrait construire une suite strictement décroissante de $n+2$ éléments à valeurs dans un certain ensemble $[\![0,n]\!]$ et donc plus exactement sur l'axiome suivant : **pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il n'existe pas d'injection de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$**. C'est la seule hypothèse qui a été faite sur la notion de cardinal. Donc sauf erreur, les enchaînements logiques de ce cours ne tournent pas en rond.

Nous débuterons donc ce chapitre avec le même axiome. Celui-ci est démontrable dans une théorie plus large, mais pour cela il faudrait donner un modèle de l'ensemble des entiers dans la théorie des ensembles et ce n'est largement pas au programme.

2 Cardinal d'un ensemble

2.1 Notion de cardinal

Définition. Soit E un ensemble. On dit que E est fini quand E est vide ou quand il existe un entier naturel $n \geqslant 1$ et une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans E.

Proposition 1. *Si E est un ensemble fini non vide, alors l'entier n de la définition précédente est unique. On l'appelle cardinal de E et on le note* $\mathrm{card}(E)$.

On rencontre aussi les notations $\#E$ ou encore $|E|$ pour le cardinal d'un ensemble fini. Concrètement, le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments. Compter des objets, c'est leur attribuer à chacun un et un seul entier naturel en commençant à 1 et en passant au suivant à chaque objet : c'est donc mettre en bijection les objets avec les entiers de 1 à n. Notre pratique du comptage depuis notre plus jeune âge nous cache la vraie question : que se passe-t-il si j'énumère les objets de E selon un autre ordre ? Rien, nous dit notre intuition, mais nous n'en avons fait l'expérience que sur quelques ensembles et tout mathématicien sait bien que quelques exemples ne suffisent pas à prouver un résultat.

Remarque. On ne confondra pas E ensemble avec $\mathrm{card}(E)$ qui est un entier naturel.

Exemples.

— $\mathrm{card}\big(\{a\}\big)=1$, $\mathrm{card}(\emptyset)=0$, $\mathrm{card}\big(\{a,b\}\big)=2$ si $a\neq b$, 1 si $a=b$

— Si p et q sont deux entiers relatifs, $\mathrm{card}\big([\![p,q]\!]\big)=q-p+1$

— Si $p\in\mathbb{N}$, $\mathrm{card}\big([\![0,p]\!]\big)=p+1$

Exercices **:**

1) Soit n un entier naturel. Combien y-a-t-il de solutions $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ de l'équation $a+b=n$?
2) Combien y-a-t-il de solutions $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ de l'équation $a+b=n$ telles que $a<b$?

Remarque. Un ensemble est infini quand il n'est pas fini. En théorie des ensembles, on peut définir les ensembles finis ou infinis de la façon suivante : un ensemble E est dit infini quand il existe une bijection de E sur une partie stricte de E (une partie de E autre que E lui-même) et il est dit fini sinon. À partir de cette définition, si E est fini, on peut alors prouver l'existence (difficilement) d'un unique entier naturel n tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$, propriété qui nous sert en fait de définition.

Proposition 2. *E est un ensemble infini si et s.si il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E.*

2.2 Cardinal et inclusion

Lemme 1. *Soit B un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et $x \in B$. Alors $B - \{x\}$ est fini et* $\operatorname{card}(B - \{x\}) = n - 1$.

Proposition 3. *Soit A et B deux ensembles.On suppose que $A \subset B$ et que B est un ensemble fini. Alors :*
- *A est également un ensemble fini et* $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(B)$.
- *Si, de plus,* $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$, *alors $A = B$.*

2.3 Cardinal et applications

Proposition 4. *Soit E et F deux ensembles finis. On suppose qu'il existe une application $\phi\colon E \to F$ qui est bijective. Alors* $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$.

Proposition 5. *Soit E et F deux ensembles finis et $\phi\colon E \to F$.*
- *Si φ est injective, alors* $\operatorname{card}(E) \leqslant \operatorname{card}(F)$.
- *Si φ est surjective, alors* $\operatorname{card}(E) \geqslant \operatorname{card}(F)$.

Une conséquence de ce résultat est **le principe des tiroirs** : si φ est une application de E dans F, F est un ensemble fini et si E est infini ou $\operatorname{card} E > \operatorname{card} F$, alors φ n'est pas injective, *i.e.* il existe deux éléments x, y de E tels que $x \neq y$ et $\varphi(x) = \varphi(y)$.

***Exercices* :**

3) Soit $a_1, \dots, a_8$ 8 entiers : montrez que $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 8} (a_i - a_j)$ est divisible par 420.
4) Soit 501 entiers compris entre 1 et 1000 : montrez qu'il en existe deux parmi ces entiers dont l'un divise l'autre (ind : écriture $n = 2^\alpha u$).

Proposition 6. *Soit E et F deux ensembles finis, ϕ une application de E dans F.*
On suppose que $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$. *Alors : ϕ est injective $\iff$ ϕ est surjective $\iff$ ϕ est bijective.*

3 Opérations sur les cardinaux

3.1 Cardinal de réunions

Proposition 7. *Soit A et B deux ensembles finis. On suppose A et B **disjoints** (c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$). Alors $A \cup B$ est également un ensemble fini et*

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Proposition 8. *Soit n ensembles finis $A_1, A_2, \dots A_n$ **disjoints deux-à-deux,** c'est-à-dire tels que*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ est également un ensemble fini et

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i).$$

***Exercices* :**

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y-a-t-il de solutions $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation $a + b + c = n$?
6) Combien y-a-t-il de solutions $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation $a + b + c = 3n$ tels que $a < b < c$ (écrire $b = a + x$ et $c = a + x + y$) ? (on l'écrira simplement sous la forme $s_n = \sum \dots$).
   Montrez que $s_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{3j-1}{2} \right\rfloor = \frac{3}{4}n^2 + \frac{1-(-1)^n}{8}$.

Proposition 9 (Formule de Poincaré)**.** *Soit A et B deux ensembles finis quelconques. Alors $A \cup B$ est également un ensemble fini et*

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

***Exercices* :**

7) Dans l'ensemble $[\![1, 1000]\!]$, combien y-a-t-il d'entiers divisibles par 2 ou par 3 ?

3.2 Cardinal du complémentaire

Proposition 10. *Soit E un ensemble fini, A une partie de E. Alors $\overline{A}$ est également un ensemble fini et*

$$\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A).$$

3.3 Lemme des bergers

Proposition 11. *Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$. Si f est surjective et pour tout $t \in F$, $f^{-1}(\{t\})$ est de cardinal p indépendant de t, alors $\operatorname{card} E = p \times \operatorname{card} F$.*

Ce lemme sans prétention est à la base de nombreux raisonnements de dénombrement fondé sur le principe multiplicatif, la suite du cours en est l'illustration.

3.4 Cardinal de produits cartésiens

Proposition 12. *Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est également un ensemble fini et*

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F).$$

On peut généraliser par récurrence à un nombre quelconque d'ensembles.

Proposition 13. *Soit n un entier naturel non nul.*
- *Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont n ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est également un ensemble fini et $\operatorname{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \operatorname{card}(E_i)$.*
- *Si E est un ensemble fini, alors E^n est également un ensemble fini et $\operatorname{card}(E^n) = \big(\operatorname{card}(E)\big)^n$.*

***Exercices* :**

8) On appelle mot de 3 lettres un assemblage de trois lettres, de a à z, considéré indépendamment de son sens. Combien y a-t-il de mots de trois lettres ?
9) Combien y en a-t-il qui contiennent une voyelle en deuxième position ?
10) Combien y en a-t-il qui contiennent exactement une voyelle ?
11) Combien y en-a-t-il qui contiennent au moins un x ?

3.5 Cardinal de l'ensemble des fonctions de E dans F, de l'ensemble des parties de E

Proposition 14. *Soit E et F deux ensembles finis. Alors l'ensemble $\mathscr{F}(E, F)$ des fonctions de E dans F (aussi noté F^E) est également un ensemble fini et*

$$\operatorname{card}\big(\mathscr{F}(E, F)\big) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}.$$

***Exercices* :**

12) On répartit huit boules numérotées de 1 à 8 dans quatre sacs numérotés de 1 à 4. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

Proposition 15. *Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble des parties de E est également un ensemble fini et*

$$\operatorname{card}\big(\mathscr{P}(E)\big) = 2^{\operatorname{card}(E)}.$$

Exercices :

13) Combien y-a-t-il de suites finies strictement croissantes d'entiers pris dans $[\![1,n]\!]$?
14) Soit m un mot de n lettres. Un sous-mot de m est un mot obtenu en supprimant des lettres de m sans changer l'ordre : par exemple, $dfacx$ est un sous-mot de $badefaacbaxeabb$. Donnez un majorant du nombre de sous-mots de m. Donnez un exemple où ce majorant n'est pas atteint.
15) Soit M une matrice à n lignes et p colonnes dont les coefficients sont tous différents. On appelle sous-matrice de M toute matrice obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes. Combien de sous-matrices peut-on construire à partir de M ?

4 Listes et combinaisons

4.1 p-listes

Définition. Soit E un ensemble fini, p un entier naturel non nul.
Une p-liste d'éléments de E est un p-uplet d'éléments de E, c'est-à-dire un élément de E^p.

Par exemple, si $E = \{0, 1, 4\}$, $(1, 0, 1, 1, 0, 4, 4)$ est une 7-liste d'éléments de E.

Remarque. Dans une p-liste d'éléments de E, **l'ordre des éléments compte** et **il peut y avoir des répétitions.**

Proposition 16 (Nombre de p-listes)**.** *Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier naturel non nul. Le nombre de p-listes d'éléments de E vaut n^p.*

Exercices :

16) Dans une urne contenant 7 boules numérotées de 1 à 7, on tire successivement 3 boules avec remise. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

4.2 p-arrangements

Définition. Soit E un ensemble fini, p un entier naturel non nul.
Une p-liste d'éléments distincts de E ou p-liste sans répétitions ou p-arrangement est une p-liste d'éléments de E où aucun élément de E n'apparaît plusieurs fois.

Remarque. Dans un p-arrangement d'éléments de E, **l'ordre des éléments compte** et **il ne peut pas y avoir de répétitions.**

Exemple. Si $E = \{0, 1, 4\}$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, 4)$ sont trois exemples différents de 2-listes d'éléments distincts de E. Il n'y a pas de 4-liste d'éléments distincts de E car E ne comporte que 3 éléments.

Proposition 17. *Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier naturel non nul. Le nombre de p-arrangements de E vaut :*

$$\mathrm{A}_n^p = \begin{cases} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \textit{si } p \leqslant n \\ 0 & \textit{si } p > n. \end{cases}$$

Exercices :

17) Dans une urne contenant 7 boules numérotées de 1 à 7, on tire successivement 3 boules sans remise. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Proposition 18 (Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre)**.** *Soit E et F deux ensembles finis. Le nombre d'injections de E dans F est donné par*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{card}(F)!}{\big(\mathrm{card}(F)-\mathrm{card}(E)\big)!} & \textit{si } \mathrm{card}(E) \leqslant \mathrm{card}(F) \\ 0 & \textit{si } \mathrm{card}(E) > \mathrm{card}(F). \end{cases}$$

Exercices :

18) Dans un hôtel où il reste 12 chambres simples libres, un groupe de 8 personnes se présente. Combien y a-t-il de manières de répartir les clients dans les chambres ?

Définition. Soit E un ensemble fini. Une permutation de E est une bijection de E dans E.

Remarque. On peut également voir une permutation comme une n-liste d'éléments distincts de E où n est le cardinal de E.

Proposition 19 (Nombre de permutations d'un ensemble)**.** *Si E est un ensemble de cardinal n, le nombre de permutations de E vaut $n!$.*

Exercices :

19) Déterminez le nombre d'anagrammes du mot MPSI.
20) Déterminez le nombre d'anagrammes du mot ARBRE.
21) Déterminez le nombre d'anagrammes du mot ANANAS.

4.3 p-combinaisons

Définition. Soit E un ensemble fini, $p \in \mathbb{N}$. Une p-combinaison d'éléments de E est une partie de E comportant exactement p éléments.

Remarque. Dans une p-combinaison, **l'ordre n'est pas pris en compte** et **les répétitions ne sont pas permises**.

Exemple. Si $E = [\![2,3,5,7]\!]$, les 1-combinaisons sont $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$ et $\{7\}$; des exemples de 2-combinaisons : $\{2,3\}$, $\{3,7\}$ etc. il y a une seule 0-combinaison : l'ensemble vide $\emptyset$ et une seule 4-combinaison : E lui-même. Il n'y a pas de 5-combinaisons.

Lemme 2 (Formule de Pascal)**.** *Notons C_n^p le nombre de p-combinaisons d'un ensemble E comportant n éléments. Alors :*

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{C}_{n+1}^{p+1} = \mathrm{C}_n^p + \mathrm{C}_n^{p+1}.$$

Proposition 20 (Nombre de p-combinaisons d'éléments de E)**.** *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel.*

Alors le nombre de p-combinaisons d'éléments de E vaut $\dbinom{n}{p}$, autrement dit

$$\mathrm{C}_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times p} & \textit{si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \textit{si } p > n. \end{cases}$$

Exercices :

22) Dans une urne contenant 7 boules numérotées de 1 à 7, on tire simultanément 3 boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Remarque. Pour des valeurs concrètes de n ou p, il est fortement déconseillé d'utiliser la notation avec des factorielles.

$\mathrm{C}_{10}^{4} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 10 \times 3 \times 7 = 210\,;\quad \mathrm{C}_{n}^{3} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

5 En pratique

Les résultats précédents montrent qu'on utilise deux opérations essentiellement pour calculer des cardinaux : l'addition et la multiplication.

Il arrive souvent qu'on soit perplexe sur le choix de l'opération... Pour mieux réfléchir, on distingue deux principes.

Lorsqu'on compte les éléments d'un ensemble E, il arrive souvent qu'on doive les classer selon leurs propriétés, donc à les considérer comme les éléments d'un ensemble connu U. Préciser E revient alors à **choisir** parmi les éléments de U ceux qui satisfont ou pas une ou plusieurs propriétés. Dénombrer E est donc déterminer le **nombre de choix**.

Si on utilise la structure « soit ..., soit ... », alors cela signifie qu'on décrit l'ensemble comme une réunion disjointe : le cardinal de E est alors **la somme** de deux cardinaux. On dit qu'on a utilisé **le principe additif**.

Si on utilise plutôt le mot « puis », alors cela signifie qu'on met en bijection l'ensemble E avec un produit cartésien ou une partie d'un produit cartésien (comme l'ensemble des p-arrangements), obtenue selon le principe des bergers : le cardinal de E est alors **le produit** des cardinaux. On dit qu'on a utilisé **le principe multiplicatif**.

Exercices :

23) Combien y-a-t-il de parties de $[\![1, 10]\!]$ ayant moins de trois éléments et dont la somme des éléments est égale à 11 ? Au moins égale à 11 ?

24) On dispose d'un jeu de 10 cartes. Un scénario est une succession de deux tirages : on effectue un premier tirage de 3 cartes, on les remet dans le paquet, on mélange et on en retire cette fois-ci 5. Combien y-a-t-il de scénarios possibles ? Combien y-a-t-il de scénarios dans lesquels les deux tirages ont exactement une carte commune ?