Problème 1 - Une étude de fonctions

Soit g la fonction définie par $g(t) = \sqrt{\dfrac{t^3+t-2}{t-2}}$.

Question 1) Déterminez l'ensemble de définition de g.

Question 2) Précisez soigneusement les propriétés de dérivabilité de g. En particulier, g est-elle dérivable en 1 à gauche ?

Question 3)

a) Montrez qu'en tout point z où g est dérivable, $g'(z)$ est de la forme $\dfrac{p(z)}{(z-2)^2 g(z)}$, où p est une fonction polynôme que vous préciserez.

b) Déduisez-en les variations de g.

Question 4) Dressez le tableau de variations de g avec les limites.

Question 5)

a) Montrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$. Déterminez de même la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$.

b) Montrez que $g(x) - x = \dfrac{2x^2+x-2}{(x-2)(g(x)+x)}$. Déduisez-en que la courbe de g a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x+1$.

c) Précisez de même l'asymptote en $-\infty$.

Question 6) Donnez l'allure de la courbe de g.

Problème 2 - Des inégalités en pagaille

Partie 1 - Une majoration

Question 1) Montrez que pour tout $t \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+t) \leqslant t$.

Question 2) Soit $\varphi : t \mapsto \dfrac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$. Précisez l'ensemble de définition de φ et vérifiez que φ est strictement monotone sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Question 3) Soit a, b deux réels strictement positifs tels que $a \leqslant b$. À l'aide de la question précédente, déterminez la monotonie de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 4) Montrez

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad \ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$$

Partie 2 - Question ouverte

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Existe-t-il une constante M_n telle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} \leqslant M_n (a+b)^{\frac{1}{n}}$?

Si oui, déterminez la plus petite valeur possible de M_n.

Problème 1

Question 1) $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2)$, or le trinôme x^2+x+2 n'a pas de racine réelle (discriminant négatif), donc le signe de x^3+x-2 est le même que celui de $x-1$.

$g(x)$ existe si et seulement si x^3+x-2 et $x-2$ ont le même signe et si $x \neq 2$, c'est-à-dire si $x-1$ et $x-2$ de même signe et $x \neq 2$, soit si $x \in]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$.

Question 2) La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, donc on cherche les points spéciaux, c'est-à-dire ceux tels que $\dfrac{t^3+t-2}{t-2} = 0$: la seule solution est 1.

Les fonctions $t \mapsto t^3+t-2$ et $t \mapsto t-2$ sont dérivables sur $]2,+\infty[$ et sur $]-\infty,1[$ donc le quotient est dérivable sur $]2,+\infty[$ d'après les th. d'opérations sur les fonctions dérivables. De plus, sur chacun de ces deux intervalles, il est à valeurs dans $]0,+\infty[$.

La fonction racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc d'après le th. de composition des fonctions dérivables, g est dérivable sur $]2,+\infty[$ et sur $]-\infty,1[$.

Pour savoir si g est dérivable en 1 (à gauche), on étudie le taux d'accroissement en 1 :

$$\frac{g(t)-g(1)}{t-1} = \frac{g(t)}{t-1} = \frac{\sqrt{\frac{(t-1)(t^2+t+2)}{t-2}}}{t-1}$$

Or ici, on travaille avec $t<1$ donc il ne faut pas oublier que $t-1<0$: $t-1 = -\sqrt{(t-1)^2}$ donc

$$\frac{g(t)-g(1)}{t-1} = \frac{\sqrt{\frac{(t-1)(t^2+t+2)}{t-2}}}{-\sqrt{(t-1)^2}} = -\sqrt{\frac{(t^2+t+2)}{(t-1)(t-2)}}$$

Sous cette forme, il devient clair d'après les th. d'opérations sur les limites que $\lim\limits_{t\to 1_-} \dfrac{g(t)-g(1)}{t-1} = -\infty$.

Donc g n'est pas dérivable en 1, mais on peut quand même dire que la courbe de g possède une tangente verticale au point d'abscisse 1.

Question 3)

a) Pour tout $z \in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$, $g'(z) = \dfrac{1}{2g(z)} \times \dfrac{(3z^2+1)(z-2)-(z^3+z-2)}{(z-2)^2} = \dfrac{1}{g(z)} \times \dfrac{z^3-3z^2}{(z-2)^2}$. En posant $p(z) = z^3-3z^2$, on a ce qu'on voulait.

b) $g'(z) = (z-3) \times \dfrac{z^2}{(z-2)^2 g(z)}$ est du signe de $z-3$, donc g est décroissante sur $]-\infty,1]$ et sur $]2,3]$ et croissante sur $[3,+\infty[$.

Question 4) $\dfrac{t^3+t-2}{t-2} = \dfrac{t^3(1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3})}{t(1-\frac{2}{t})} = t^2\dfrac{1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}}{1-\frac{2}{t}}$.

Sous cette forme, il est facile de voir que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^3+t-2}{t-2} = +\infty$ donc par composition des limites, comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = +\infty$.

Quand t tend vers 2, t^3+t-2 tend vers 8 et $t-2$ tend vers 0_+, donc $\lim\limits_{t\to 2} g(t) = +\infty$.

On résume notre étude dans le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		1	2		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$			$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0		$+\infty$ $\searrow$	$\sqrt{10}$	$\nearrow$	$+\infty$

Question 5)

a) On a montré dans la question précédente que $g(x) = \sqrt{x^2 \dfrac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x}}} = |x|\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x}}}$

Donc quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{g(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x}}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$. Et de même, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = -1$.

b) Simple calcul utilisant l'astuce des quantités conjuguées : $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$...

Puis $g(x) - x = \dfrac{x^2(2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x})(\frac{g(x)}{x}+1)} = \dfrac{2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{(1-\frac{2}{x})(\frac{g(x)}{x}+1)}$

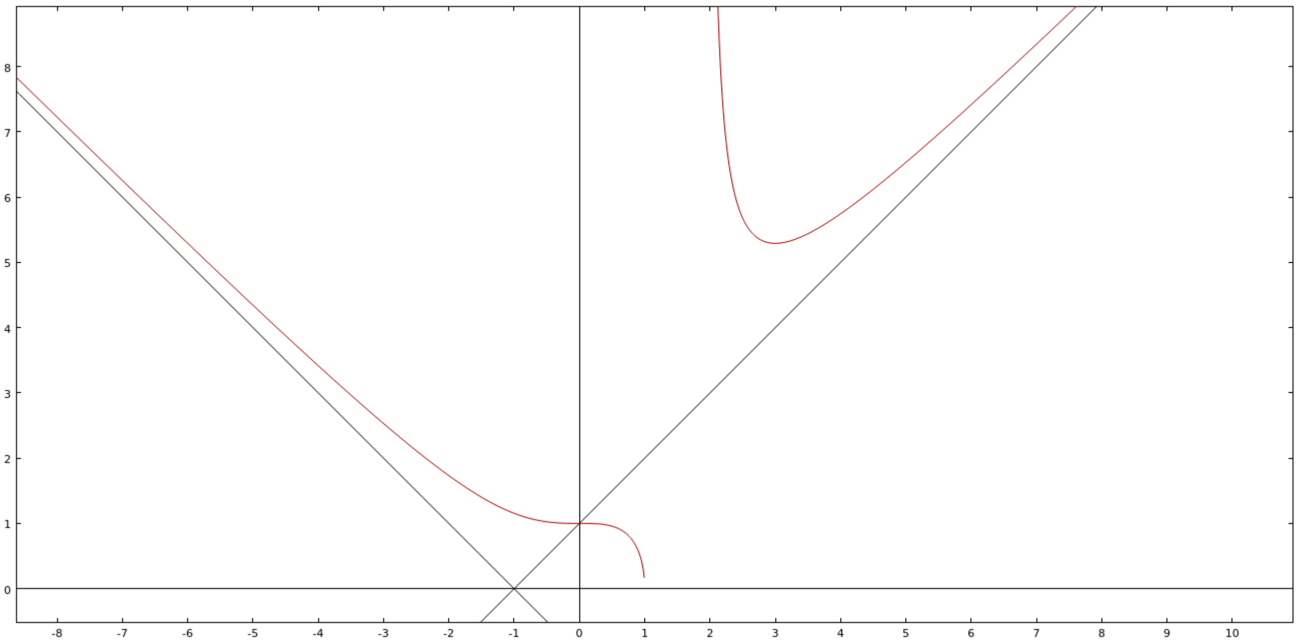
Comme $\dfrac{g(x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - x = 1$.
Autrement dit la courbe de g a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x + 1$.

c) On refait la même chose :

$g(x) + x = \dfrac{2x^2+x-2}{(x-2)(g(x)-x)} = \dfrac{2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{(1-\frac{2}{x})(\frac{g(x)}{x}-1)}$.

Comme $\dfrac{g(x)}{x}$ tend vers -1 quand x tend vers $-\infty$, on a alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) + x = -1$.
Donc la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à la courbe de g en $-\infty$.

Question 6)



Problème 2

Partie 1

Question 1) Soit $F : t \mapsto t - \ln(1+t)$. F est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$.

Pour tout $t > -1$, $F'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t}$. On en déduit que F est décroissante sur $]-1,0]$ et croissante sur $[0,1[$, donc elle possède une valeur minimale en 0, qui est 0.

Donc pour tout $t > -1$, $F(t) \geqslant 0$, ce qu'on voulait montrer.

Question 2) Il est presque évident que $\mathscr{D}_\varphi =]-1,0[\cup]0,+\infty[$. Il est facile aussi de vérifier que φ est dérivable sur chaque intervalle sur lequel elle est définie.

Puis par application des règles de calculs sur les dérivées, $\varphi'(t) = \dfrac{-1}{t^2}\ln(t+1) + \left(1+\dfrac{1}{t}\right) \times \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{-1}{t^2}(\ln(1+t) - t)$.

D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $t \in \mathscr{D}_\varphi$, $\varphi'(t) \geqslant 0$ donc que φ est croissante sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

Question 3) Soit $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Il est facile de vérifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puis pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{(\ln(1+bx))^2} = \dfrac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2}$

donc $g'(x) = \dfrac{abx(\varphi(bx) - \varphi(ax))}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2}$.

Le dénominateur est strictement positif. Comme on a supposé $0 < a \leqslant b$ et $x > 0$, on a donc $0 < ax \leqslant bx$, donc $\varphi(bx) - \varphi(ax) \geqslant 0$ d'après la croissance de φ, donc $g'(x) \geqslant 0$.

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

Si $a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$ donc d'après la question précédente, $g\left(\dfrac{1}{b}\right) \leqslant g\left(\dfrac{1}{a}\right)$, autrement dit $\dfrac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln 2} \leqslant \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$

donc il vient $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$ (remarque : on multiplie des inégalités par des nombres positifs).

Si $a \geqslant b$, il suffit d'échanger les rôles de a et b : le résultat précédent est invariant par cet échange, donc il reste vrai.

Partie 2

On pose $x = \dfrac{b}{a}$.

Alors $a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} \leqslant M_n(a+b)^{\frac{1}{n}} \iff 1 + x^{\frac{1}{n}} \leqslant M_n(1+x)^{\frac{1}{n}}$.

Quand a et b décrivent tous les deux $\mathbb{R}_+^*$, leur quotient x décrit aussi $\mathbb{R}_+^*$ et donc $t = x^{1/n}$ le fait aussi.

Il suffit donc de trouver M_n tel que pour $t > 0$, $1 + t \leqslant M_n(1+t^n)^{\frac{1}{n}}$ ou encore $(1+t)^n \leqslant M_n^n(1+t^n)$.

On étudie donc la fonction $f : t \mapsto \dfrac{(1+t)^n}{1+t^n}$ sur $]0, +\infty[$.

Cette fonction est clairement dérivable sur cet intervalle et pour tout $t > 0$, $f'(t) = \dfrac{n(1+t)^{n-1}(1+t^n) - (1+t)^n n t^{n-1}}{(1+t^n)^2}$

donc $f'(t) = \dfrac{n(1+t)^{n-1}}{(1+t^n)^2}(1 + t^n - t^{n-1}(1+t)) = \dfrac{n(1+t)^{n-1}}{(1+t^n)^2}(1 - t^{n-1})$.

On en déduit les variations de f : d'abord croissante sur $]0, 1]$, puis décroissante sur $[1, +\infty[$. f a donc une valeur maximale en 1, qui est 2^{n-1}.

La meilleure valeur de M_n est donc $(2^{n-1})^{\frac{1}{n}}$.