Problème 1 - Étude d'une fonction définie par une intégrale

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$

Question 1) Justifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x)$ existe.

Question 2)

a) On pose φ une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sur $\mathbb{R}^*$: pourquoi est-on sûr que φ existe ? Pourquoi φ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$?

b) Exprimez f à l'aide de φ et justifiez que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

c) Pour tout $x \neq 0$, calculez $f'(x)$ et déduisez-en que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Question 3)

a) Pour $x \neq 0$, que vaut $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$?

b) Montrez que pour tout $x \neq 0$, si $x > 0$, alors $0 < f(x) \leqslant \ln 2$ et si $x < 0$, alors $f(x) \geqslant \ln 2$.

c) Montrez que f possède des limites réelles en 0 à droite et à gauche ainsi qu'en $+\infty$ que vous ne chercherez pas à préciser (ceci est l'objet des questions suivantes).

Question 4)

a) Montrez que pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

b) Donnez la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Question 5) On pose $\alpha : t \mapsto \dfrac{e^{-t} - 1}{t}$.

a) Montrez que α est prolongeable par continuité en 0. On suppose donc désormais que α a été prolongée de cette façon donc qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Justifiez que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \alpha(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et déduisez-en que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \ln 2$.

Question 6) Montrez que f est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: que valent $f(0)$ et $f'(0)$?

Question 7)

a) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en remarquant que $\dfrac{1}{t} = \dfrac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}} \times \dfrac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}$, montrez que pour tout $x > 0$, $(\ln 2)^2 \leqslant f(x)f(-x)$.

c) Déterminez la limite de f en $-\infty$ ainsi que l'allure de la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

Question 8) Donnez l'allure de la courbe de f.

Problème 2 - Algébre linéaire

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f l'endomorphisme de E tel que sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -22 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Partie 1

Question 1)

a) Montrez que f n'est pas un automorphisme de E.

b) Donnez la dimension, ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

Question 2)

a) Donnez une base de $\operatorname{Im} f$ constituée de vecteurs dont deux coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont 0 et 1.

b) Montrez que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Question 3) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $p(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id}_E - f)$. Vérifiez que $p(\lambda)$ est un polynôme unitaire de degré 3 et montrez que l'équation $p(\lambda) = 0$ a pour solutions trois réels distincts 0, -1 et un troisième réel que vous préciserez.

Question 4) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda = \{v \in E / f(v) = \lambda v\}$.

a) Montrez que E_λ est un s.e.v. de E.

b) Pour $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$, justifiez que E_λ est une droite vectorielle et donnez-en un vecteur directeur u_λ : il est demandé des vecteurs à coordonnées entières et dont la première coordonnée est positive.

Question 5) Soit u_0 le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

a) Montrez que la famille $\mathscr{C} = (u_0, u_{(-1)}, u_2)$ est une base de E, qu'on appelle $\mathscr{C}$.

b) Donnez la matrice D de f dans la base $\mathscr{C}$.

Question 6) On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

a) Donnez P, puis calculez P^{-1}.

b) Quelle relation y-a-t-il entre A, D et P ?

Partie 2

On cherche les endomorphismes g de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Soit donc g un tel endomorphisme de E.

Question 1)

a) Montrez que $g(u_0) \in \operatorname{Ker} f$, déduisez-en que $g(u_0)$ est colinéaire à u_0.

b) Montrez de même que $g(u_{(-1)}) \in E_{(-1)}$ et $g(u_2) \in E_2$. Que pouvez-vous en déduire sur les vecteurs $g(u_{(-1)})$ et $u_{(-1)}$? Sur les vecteurs $g(u_2)$ et u_2 ?

c) Justifiez que la matrice de g dans la base $\mathscr{C}$ est de la forme $H = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

Question 2) On appelle G la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$. Quelle relation y-a-t-il entre G, H et P ? Donnez la forme générale de G

Question 3) On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des endomorphismes g tels que $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrez que $\mathscr{E}$ est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$.

b) Montrez que la dimension de $\mathscr{E}$ est 3 et donnez-en une base.

Problème 1

Question 1) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (par opérattions sur les fonctions continues) et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, x et $2x$ ont le même signe donc le segment $[x, 2x]$ ne contient pas 0, donc sur $[x, 2x]$, $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue, donc son intégrale sur ce segment, qui est $f(x)$, existe.

Question 2)

a) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, donc d'après le th. fondamental de l'analyse, elle possède une primitive sur chacun de ces deux intervalles, donc possède une primitive sur $\mathbb{R}^*$.
φ étant une primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$, elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

b) Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = [\varphi(t)]_{t=x}^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$.
φ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, par composition et opérations sur les fonctions de classe C^1, f l'est aussi.

c) De plus, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2\dfrac{e^{-2x}}{2x} - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-x}(e^{-x} - 1)}{x}$.
La fonction exp étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et strictement positive, quand $x > 0$, alors $e^{-x} < 1$ donc $f'(x) < 0$ et quand $x > 0$, alors $e^{-x} > 1$ donc $f'(x) < 0$.
f est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Question 3)

a) $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln|2x| - \ln|x| = \ln\frac{|2x|}{|x|} = \ln 2.$

b) Pour tout $x > 0$, pour tout $t \in [x, 2x]$, $e^{-t} \leqslant 1$ donc $\dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{1}{t}$ et les bornes sont dans le bon sens, donc par croissance de l'intégrale, $f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$.
De plus, sur $[x, 2x]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue et strictement positive et les bornes sont dans le bon sens, donc d'après le th. de stricte positivité de l'intégrale, $f(x) > 0$.
Pour tout $x < 0$, on remet d'abord les bornes dans le bon sens : $f(x) = -\displaystyle\int_{2x}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{2x}^{x} \frac{e^{-t}}{-t}\,\mathrm{d}t$,
puis pour tout $t \in [2x, x]$, $t < 0$ donc $e^{-t} > 1$ et $-t > 0$ donc $\dfrac{e^{-t}}{-t} \geqslant \dfrac{1}{-t}$ donc par croissance de l'intégrale, $f(x) \geqslant \displaystyle\int_{2x}^{x} \frac{1}{-t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$.

c) Sur $]0, +\infty[$, f est donc bornée et décroissante donc d'après le th. de la limite monotone, f possède des limites réelles en 0_+ et en $+\infty$.
Sur $]-\infty, 0[$, f est donc minorée et décroissante donc d'après le th. de la limite monotone, f possède une limite réelle en 0_-.

Question 4)

a) Pour tout $x \geqslant 1$, pour tout $t \in [x, 2x]$, $t \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{t} \leqslant 1$ donc $\dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$ et les bornes sont dans le bon sens, donc par croissance de l'intégrale, $f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

b) Donc pour tout $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \left[-e^{-t}\right]_x^{2x} = e^{-x} - e^{-2x}$. Par th. d'encadrement, f a pour limite 0 en $+\infty$.

Question 5)

a) On sait que $e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$ donc $e^{-t} - 1 \underset{t \to 0}{\sim} -t$ donc $\alpha(t) \underset{t \to 0}{\sim} -1$: α a une limite réelle en 0 donc est prolongeable par continuité en 0.

b) La fonction α est continue sur $\mathbb{R}$ donc le même raisonnement que pour f montre que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \alpha$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc en particulier continue sur $\mathbb{R}$. Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^0 \alpha(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Or $\displaystyle\int_x^{2x} \alpha(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = f(x) - \ln 2$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \ln 2$

Question 6) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et possède une limite réelle en 0 donc elle est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{x} = -1$, donc d'après le th. de prolongement C^1, f est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = \ln 2$ et $f'(0) = -1$.

Question 7)

a) Changement de variable $u = -t$: $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{2x} \frac{e^{u}}{-u} \times (-\,\mathrm{d}u) = \int_{x}^{2x} \frac{e^{u}}{u}\,\mathrm{d}u.$

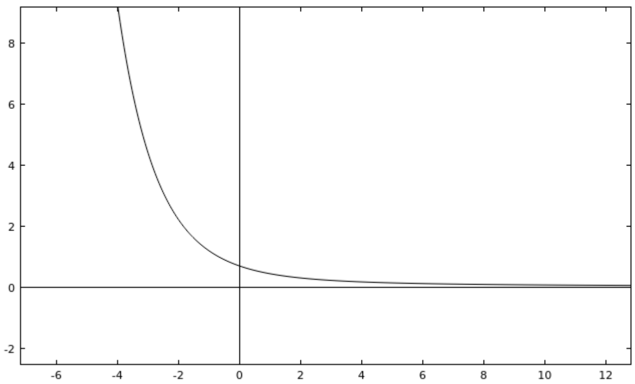
b) Si $x > 0$, alors $\displaystyle\left(\int_x^{2x} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}} \times \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}}\right)^2 \mathrm{d}t \times \int_x^{2x} \left(\frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}\right)^2 \mathrm{d}t$

donc $\displaystyle\left(\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \times \int_x^{2x} \frac{e^{t}}{t}\,\mathrm{d}t$ donc $(\ln 2)^2 \leqslant f(x)f(-x)$.

c) Quand x tend vers $+\infty$, alors $-x$ tend vers $-\infty$ et $f(x) > 0$ donc $f(-x) \geqslant \dfrac{(\ln 2)^2}{f(x)}$, or f a pour limite 0 en $+\infty$, donc par opérations sur les limites et th. d'encadrement $f(-x)$ tend vers $+\infty$.

De plus, on a montré que $f(x) \leqslant e^{-x} - e^{-2x} \leqslant e^{-x}$ donc $f(-x) \geqslant (\ln 2)^2 e^x$, donc $\dfrac{f(-x)}{-x} \leqslant -(\ln 2)^2 \dfrac{e^x}{x}$ donc par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(-x)}{-x} = -\infty$: la courbe de f possède une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Oy) au voisinage de $-\infty$.

Question 8)



Problème 2

Partie 1

Question 1)

a) $\operatorname{rg} f = 2 \neq \dim E$ donc f n'est pas injective.

b) D'après le th. du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f = 1$.

On pose $v \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$. Pour déterminer le noyau, on résout l'équation $f(v) = 0$, ce qui revient à un système linéaire homogène :

$$v \in \operatorname{Ker} f \iff f(v) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 6x - 8y - 22z &=& 0 \\ x - z &=& 0 \\ x - 2y - 5z &=& 0 \end{array}\right.$$

On trouve la droite vectorielle dirigée par $u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Question 2)

a) L'image de f est un plan vectoriel, qui a pour base $(f(e_1), f(e_2))$.

$v_1 = \dfrac{-1}{2} f(e_2)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $v_2 = f(e_1) - \dfrac{1}{2} f(e_2)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$. Ces deux vecteurs sont dans $\operatorname{Im} f$ et comme ils ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $\operatorname{Im} f$.

b) $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(u_0, v_1, v_2)$: on calcule $\operatorname{rg}(u_0, v_1, v_2))$, on trouve 3, donc $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) = 3$. Or $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ est un s.e.v. de E qui a la même dimension, donc $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.
De plus, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$, donc $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 0$: les deux s.e.v. sont en somme directe, donc finalement $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Question 3) $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2)$.

Question 4)

a) $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ et $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est un endomorphisme de E (combinaison linéaire de deux endomorphismes), donc E_λ est un s.e.v. de E.

b) $v \in E_{(-1)} \iff f(v) = -v \iff \begin{cases} 6x - 8y - 22z &= -x \\ x - z &= -y \\ x - 2y - 5z &= -z \end{cases}$

On résout, on trouve une droite vectorielle dirigée par le vecteur $u_{(-1)} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

De même, $v \in E_2 \iff f(v) = 2v \iff \begin{cases} 6x - 8y - 22z &= 2x \\ x - z &= 2y \\ x - 2y - 5z &= 2z \end{cases}$

On trouve une droite vectorielle dirigée par le vecteur $u_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Question 5)

a) $\operatorname{rg}(u_0, u_{(-1)}, u_2) = 3$ et la famille a trois vecteurs dans un espace de dimension 3, donc c'est une base de E.

b) Immédiat : $\underset{\mathscr{C}}{\operatorname{mat}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 6)

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

b) D'après le cours, $D = P^{-1}AP$.

Partie 2

Question 1)

a) $f \circ g(u_0) = g \circ f(u_0)$, donc $f(g(u_0)) = g(f(u_0)) = g(0) = 0$, donc $g(u_0) \in Kerf$. Or on a montré que $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle dirigée par u_0, donc $g(u_0)$ est colinéaire à u_0.

b) De la même façon, $f(g(u_{(-1)}) = g(f(u_{(-1)})) = g(-u_{(-1)}) = -g(u_{(-1)})$ donc $g(u_{(-1)}) \in E_{(-1)}$. Or $E_{(-1)}$ est une droite vectorielle dirigée par $u_{(-1)}$, donc $g(u_{(-1)})$ est colinéaire à $u_{(-1)}$. On fait de même pour u_2.

c) $g(u_0)$ est colinéaire à u_0 donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u_0) = \alpha u_0$. De même pour les deux autres vecteurs.

Question 2) $H = P^{-1}GP$ donc $G = PHP^{-1}$. On calcule ce produit de matrices, on trouve :

$$G = \underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}}\, g = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta + 2\gamma & -2\alpha + 4\beta - 2\gamma & -4\alpha + 10\beta - 6\gamma \\ -2\alpha + \beta + \gamma & 4\alpha - 2\beta - \gamma & 8\alpha - 5\beta - 3\gamma \\ \alpha - \beta & -2\alpha + 2\beta & -4\alpha + 5\beta \end{pmatrix}$$

Question 3)

a) $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathscr{L}(E)$, non vide puisqu'elle contient bien sûr l'endomorphisme nul.
Soit $(g_1, g_2) \in \mathscr{E}^2$. Alors $f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2 = g_1 \circ f + g_2 \circ f = (g_1 + g_2) \circ f$, donc $g_1 + g_2 \in \mathscr{E}$.
Soit $g \in \mathscr{E}$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors $f \circ (kg) = k(f \circ g) = k(g \circ f) = (kg) \circ f$, don c $kg \in \mathscr{E}$.
Au total, $\mathscr{E}$ est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$.

b) On a montré que $g \in \mathscr{E}$ si et seulement si $\underset{\mathscr{C}}{\operatorname{mat}}\, g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. On note alors g_1, g_2, g_3 les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathscr{C}$ sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On voit alors que $g \in \mathscr{E}$ si et seulement si $g = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$, ce qui prouve que $\mathscr{E}$ est engendré par $(g_1 g_2, g_3)$. De plus, l'égalité $\alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3 = 0$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc la famille (g_1, g_2, g_3) est libre.
Donc $\mathscr{E}$ est de dimension 3 et une base est (g_1, g_2, g_3).