Problème 1 - Calcul de $\zeta(2)$

On considère les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définies par : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Les quatre premières questions sont indépendantes les unes des autres et peuvent être abordées dans l'ordre souhaité.

Question 1)

a) Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

b) Exprimez la somme S_n à l'aide d'une intégrale.

Question 2) Vérifiez que, pour tout réel $t \in]0, 2\pi[$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$$

Question 3) On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(t) = \dfrac{t^2}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \in]0,\pi] \\ g(0) = 0. \end{cases}$

Montrez que g est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

Question 4) Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$. Montrez

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Question 5)

a) Montrez que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{12}$.

b) Déduisez-en que la suite (T_n) converge et que sa limite est $\dfrac{\pi^2}{6}$ (vous pourrez chercher une relation entre S_{2n}, T_{2n} et T_n).

Problème 2 - Des intégrales au service de l'arithmétique

Dans tout ce problème, la lettre p désigne toujours un nombre premier.

Ainsi la notation $\displaystyle\sum_{p\leqslant x} f(p)$ représente la somme des nombres $f(p)$ quand p parcourt les nombres premiers inférieurs ou égaux à x : $f(2) + f(3) + f(5) + \ldots + f(P)$ où P est le plus grand nombre premier immédiatement inférieur à x (rappel : une somme vide vaut par convention 0).

Pour $x > 0$, on pose

$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1 \quad ; \quad S(x) = \sum_{p\leqslant x} \ln p$$

Autrement dit, $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x et $S(x)$ est la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

Pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ tel que $x < y$, on pose $P(x, y) = \displaystyle\prod_{x<p\leqslant y} p$, produit des nombres premiers appartenant à l'intervalle semi-ouvert $]x, y]$ (rappel : un produit vide est par convention égal à 1) et $Q(y) = P(1, y) = \displaystyle\prod_{p\leqslant y} p$.

Partie 1 - Une majoration

Question 1)

a) Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ tel que $x < y$. Justifiez que $Q(y) = Q(x) \times P(x,y)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $Q(n+1) = Q(n)$ ou $Q(n+1) = (n+1)Q(n)$: vous expliquerez selon la valeur de $n+1$ quand l'une ou l'autre des deux égalités est vraie.

Question 2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

a) Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k}$? Comparez les nombres $\dbinom{2m+1}{m}$ et $\dbinom{2m+1}{m+1}$.

b) Montrez que $\dbinom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

Question 3) Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P(m+1, 2m+1)$ divise $\dbinom{2m+1}{m}$.

Question 4) Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, si $Q(m+1) \leqslant 4^{m+1}$, alors $Q(2m+1) \leqslant 4^{2m+1}$.

Question 5) Montrez par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q(n) \leqslant 4^n$. Puis déduisez-en que pour tout $x > 0$, $Q(x) \leqslant 4^x$.

Partie 2 - Une égalité fondamentale

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note p_k le k-ème nombre premier (dans l'ordre croissant) : $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$, $p_8 = 19, \ldots$

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[2,+\infty[$.

Question 1)

a) Justifiez que pour tout $(a,b) \in [2,+\infty[^2$, $\displaystyle\int_a^b S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, justifiez que $\displaystyle\int_{p_k}^{p_{k+1}} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = S(p_k) \times (f(p_{k+1}) - f(p_k))$.

Question 2)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_2^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=1}^{n} \ln(p_k)f(p_k) + S(p_n)f(p_n)$.

b) Déduisez-en que pour tout $x \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{p \leqslant x} \ln(p)f(p) = S(x)f(x) - \int_2^x S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 3 - Majoration de $\pi(x)$

Dans cette partie, on pose $f = \dfrac{1}{\ln}$.

Question 1) Montrez que pour tout $x \geqslant 2$,

$$\pi(x) \leqslant 2\ln 2 \left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \right)$$

Question 2) On pose $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^u}{u^2}$, définie sur $]0,+\infty[$.

a) Montrez que l'équation $\varphi(u) = \dfrac{2}{(\ln 2)^2}$ possède exactement deux solutions dans l'intervalle $]0,+\infty[$ et donnez la plus petite des deux. On appelle α la plus grande des deux.

b) Justifiez que si $z \geqslant \alpha$, $\displaystyle\max_{[\ln 2, z]} \varphi = \varphi(z)$.

Question 3) Montrez que pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^\alpha$, $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{(\ln x)^2}(\ln x - \ln 2)$.

Question 4) Montrez que pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^\alpha$, $\pi(x) \leqslant 4\ln 2 \dfrac{x}{\ln x}$.

Question 5) Expliquez pourquoi cette inégalité nous apprend que les nombres premiers deviennent de plus en plus rares quand on parcourt les entiers naturels dans l'ordre croissant.

Un résultat très difficile à obtenir donne une meilleure information : $\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln x}$ *(th. de La Vallée Poussin, 1896). Avec des moyens élémentaires, nous avons obtenu une majoration pas si mauvaise, finalement.*

Problème 3 - Algèbre linéaire

Soit E un K-e.v. de dimension n, u un endomorphisme de E.

On suppose qu'il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 \circ v = u$ et $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$ (conditions notées C).

Question 1) Montrez que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

Question 2) Montrez que $v \circ u \circ v = v$ (vous pourrez considérer les vecteurs $y = u \circ v(x) - x$).

Question 3) Montrez que $E = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} v$.

Question 4) Montrez enfin que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Réciproquement, on suppose désormais que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Question 5) Montrez l'existence de v satisfaisant aux deux conditions C.

Devoir surveillé 10 - sujet Centrale - Mines - Corrigé

Problème 1

Question 1)

a) Par une double intégration par parties, les fonctions mises en jeu étant largement de classe C^1.

b) Par linéarité de l'intégrale, on obtient $S_n = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(nt)\right) dt$

Question 2) Plusieurs façons de le montrer : soit directement en passant par les complexes et les sommes de termes de suites géométriques, soit par récurrence.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \sum_{k=1}^{n} \Re(e^{ikt}) = \Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right)$: on reconnaît la somme des termes de la suite géométrique de raison e^{ikt}. Or comme $t \in]0, 2\pi[$, $e^{ikt} \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}$.

Puis on pense à « l'astuce » ! $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = e^{it}\frac{e^{int/2}(e^{-int/2}-e^{int/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})} = e^{it}e^{i(n-1)t/2} \times \frac{\sin n\frac{t}{t}}{\sin\frac{t}{2}} = e^{i(n+1)t/2} \times \frac{\sin n\frac{t}{t}}{\sin\frac{t}{2}}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \cos(n+1)\frac{t}{2}\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$. Puis on utilise une formule de trigonométrie pour transformer le produit du sinus et du cosinus en une somme : $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n\frac{t}{2} + (n+1)\frac{t}{2}) + \sin(n\frac{t}{2} - (n+1)\frac{t}{2})}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin(nt+\frac{t}{2}) - \sin(\frac{t}{2})}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Question 3) g est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ d'aprés les th. d'opération sur les fonctions de classe C^1.

$g(t) \sim \dfrac{t^2}{t/2} \sim 2t$ quand t tend vers 0, donc $\lim\limits_{0} g = 0 = g(0)$: g est donc continue en 0. Donc g est continue sur $[0,\pi]$.

Pour tout $t \in]0,\pi]$, $g'(t) = \dfrac{2t\sin\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}\cos\frac{t}{2}}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{\frac{t^2}{4} + o(t^2)} \sim 2$ donc g' a une limite réelle en 0.

On récapitule : g est continue sur $[0,\pi]$, de classe C^1 sur $]0,\pi]$ et g' a une limite réelle en 0, donc d'aprés le th. de prolongement C^1, g est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

Question 4) f est de classe C^1 sur $[a,b]$, donc f' est continue sur le segment $[a,b]$, d'où l'existence de $M = \sup\limits_{[a,b]} |f'|$ (th. des bornes atteintes).

À l'aide d'une intégration par parties, on a pour $x > 0$:

$\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \left[f(t) \times \frac{-\cos(xt)}{x}\right]_a^b - \int_a^b f'(t) \times \frac{-\cos(xt)}{x} dt$ car les fonctions $u = f$ et $v : t \mapsto \dfrac{-\cos(xt)}{x}$ sont de classe C^1 sur $[a,b]$.

Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\int_a^b f'(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t + f(a)\cos(xa) - f(b)\cos(xb)\right)$

Puis d'aprés l'inégalité triangulaire, on a : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(\int_a^b |f'(t)\cos(xt)|\,dt + |f(a)| + |f(b)|\right)$.

Or $|f'(t) \times \cos(xt)| = |f'(t)| \times |\cos(xt)| \leqslant M \times 1 = M$, donc par croissance de l'intégrale, on a :

$\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(M(b-a) + |f(a)| + |f(b)|\right)$.

Donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Question 5)

a) $S_n = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2\left(\sum_{k=1}^n \cos(nt)\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2\left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t$

$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{12}.$

g est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ d'après la question 3 et quand $n \to +\infty$, $x = n + \frac{1}{2} \to +\infty$ donc d'après la question 4, $\int_0^\pi g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t$ a pour limite 0, donc $S_n \to \frac{\pi^2}{12}$.

b) $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n,k \text{ pair}}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n,k \text{ impair}}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = -\sum_{j=1}^n\frac{1}{(2j)^2} + \sum_{j=1}^n\frac{1}{(2j-1)^2}.$

Donc $S_{2n} = \frac{-1}{4}T_n + \sum_{j=1}^n\frac{1}{(2j-1)^2}$.

De même, $T_{2n} = \frac{1}{4}T_n + \sum_{j=1}^n\frac{1}{(2j-1)^2}$.

Donc $S_{2n} - T_{2n} = \frac{-1}{2}T_n$ (relation A) et $S_{2n} + T_{2n} = 2\sum_{j=1}^n\frac{1}{(2j-1)^2}$ (relation B).

Il est évident d'une part que la suite de terme général $U_n = 2\sum_{j=1}^n\frac{1}{(2j-1)^2}$ est croissante (on ajoute des réels positifs). D'autre part, comme $T_{2n} \geqslant 0$, on a $U_n \leqslant S_{2n}$ d'après la relation B et comme la suite (S_{2n}) converge, elle est bornée, donc majorée par une constante, donc la suite (U_n) est majorée. Donc la suite (U_n) converge (th. de la limite monotone).

Donc $(T_n) = 4(U_n - S_{2n})$ converge aussi.

Comme (T_n) converge vers un réel ℓ, par passage à la limite dans (A), on obtient $\frac{\pi^2}{12} - \ell = -\frac{1}{2}\ell$, donc $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème 2

Partie 1

Question 1)

a) Quand p est un nombre premier inférieur ou égal à y, il est
— soit inférieur ou égal à x
— soit strictement supérieur ou égal à x
Donc $Q(y) = \prod_{p\leqslant y} p = \prod_{p\leqslant x} p \times \prod_{x<p\leqslant y} p = Q(x)\times P(x,y)$.

b) Si $n+1$ n'est pas un nombre premier, alors les nombres premiers p tels que $p \leqslant n+1$ sont inférieurs ou égaux à n, donc $Q(n+1) = Q(n)$.
Si $n+1$ est premier, alors les nombres premiers p tels que $p \leqslant n+1$ sont inférieurs ou égaux à n ou $n+1$, donc $Q(n+1) = (n+1)Q(n)$.

Question 2)

a) D'après la formule du binôme : $2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}$.

Par symétrie des coefficients du binôme, $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{(2m+1)-(m+1)} = \binom{2m+1}{m}$.

b) La somme $\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}$ est une somme de réels positifs, donc la somme de deux de ses termes est inférieure ou égale : $\binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \leqslant \sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k} = 2\times 4^m$.

Or $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$, donc $2\binom{2m+1}{m} \leqslant 2\times 4^m$, donc $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

Question 3) $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)(2m)\dots(m+1)}{(m+1)!}$ donc $m!\times\binom{2m+1}{m} = (2m+1)(2m)\dots(m+2)$.

Les nombres premiers p tels que $m+1 < p \leqslant 2m+1$ apparaissent dans les facteurs du produit $(2m+1)(2m)\dots(m+2)$ donc $P(m+1, 2m+1)$ divise $m!\times\binom{2m+1}{m}$

Or comme tous les facteurs premiers de $P(m+1, 2m+1)$ sont strictement plus grands que tous les facteurs de $m!$, ils ne le divisent pas, donc ils sont premiers avec $m!$, donc $P(m+1, 2m+1)$ est premier avec $m!$.

D'après le th. de Gauss, $P(m+1, 2m+1)$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

Question 4) Si $Q(m+1) \leqslant 4^{m+1}$, alors d'après la question 1,
$Q(2m+1) = Q(m+1)P(m+1, 2m+1) \leqslant 4^{m+1}P(m+1, 2m+1)$.

Mais comme $P(m+1, 2m+1)$ divise $\binom{2m+1}{m}$, on a $P(m+1, 2m+1) \leqslant \binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$ d'après la question 2. Donc finalement $Q(2m+1) \leqslant 4^{m+1} \times 4^m = 4^{2m+1}$.

Question 5) On pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat $Q(n) \leqslant 4^n$.

Pour $n = 1$, $Q(1) = 1 \leqslant 4$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Pour $n = 2$, $Q(2) = 2 \leqslant 4^2$ donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(1), \dots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies ($n \geqslant 2$), alors deux cas se présentent :
- si $n+1$ n'est pas premier, alors $Q(n+1) = Q(n) \leqslant 4^n \leqslant 4^{n+1}$;
- si $n+1$ est premier, alors comme $n+1 \geqslant 3$, n est un nombre pair (un nombre premier autre que 2 est impair), donc on écrit $n = 2m$; par hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(m+1)$ est vraie, donc $Q(m+1) \leqslant 4^{m+1}$, donc d'après la question 4, $Q(n+1) = Q(2m+1) \leqslant 4^{2m+1} = 4^{n+1}$.

Dans les deux cas, on peut conclure $Q(n) \leqslant 4^n$, donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q(n) \leqslant 4^n$.

Soit maintenant $x > 0$. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant x < n+1$ (autrement dit n est la partie entière de x). Alors comme il n'y a pas de nombre premier strictement entre n et x, $P(n, x) = 1$, donc $Q(x) = Q(n)P(n, x) = Q(n) \leqslant 4^n \leqslant 4^x$.

Partie 2

Question 1)

a) La fonction S est en escaliers : sur tout intervalle $[p_k, p_{k+1}[$, elle est constante égale à $S(p_k)$. Donc le produit $S \times f'$, produit d'une fonction en escaliers et d'une fonction continue, est continue par morceaux. Donc sur tout segment, son intégrale existe.

b) Conséquence de ce qui précède : S est constante égale à $C = S(p_k)$ sur $[p_k, p_{k+1}[$, donc
$\int_{p_k}^{p_{k+1}} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{p_k}^{p_{k+1}} Cf'(t)\,\mathrm{d}t = C\int_{p_k}^{p_{k+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t = S(p_k) \times (f(p_{k+1}) - f(p_k))$ (car f est C^1).

Question 2)

a) $\int_2^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{p_1}^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{p_k}^{p_{k+1}} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ (relation de Chasles)

$$= \sum_{k=1}^{n-1} S(p_k) \times (f(p_{k+1}) - f(p_k)) = \sum_{k=1}^{n-1} S(p_k)f(p_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} S(p_k)f(p_k)$$
$$= \sum_{k=2}^{n} S(p_{k-1})f(p_k) - \sum_{k=1}^{n-1} S(p_k)f(p_k) = S(p_{n-1})f(p_n) + \sum_{k=2}^{n-1} S(p_{k-1})f(p_k) - \sum_{k=2}^{n-1} S(p_k)f(p_k) - S(p_1)f(p_1)$$
$$= S(p_{n-1})f(p_n) + \sum_{k=2}^{n-1}(S(p_{k-1}) - S(p_k))f(p_k) - S(p_1)f(p_1)$$
$$= S(p_{n-1})f(p_n) + \sum_{k=2}^{n}(S(p_{k-1}) - S(p_k))f(p_k) - S(p_1)f(p_1) - (S(p_{n-1}) - S(p_n))f(p_n)$$
$$= S(p_n)f(p_n) + \sum_{k=2}^{n}(-\ln(p_k))f(p_k) - \ln(p_1)f(p_1) = -\sum_{k=1}^{n}\ln(p_k)f(p_k) + S(p_n)f(p_n)$$

b) Soit $x \geqslant 2$. La suite des nombres premiers est strictement croissante, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_n \leqslant x < p_{n+1}$, donc sur $[p_n, x]$, la fonction S est constante égale à $S(p_n)$.

De même, $\sum_{p \leqslant x} \ln(p)f(p) = \sum_{p \leqslant p_n} \ln(p)f(p) = \sum_{k=1}^{n} \ln p_k f(p_k)$.

Donc $\sum_{p \leqslant x} \ln(p)f(p) = -\int_2^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t + S(p_n)f(p_n) = -\int_2^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t + S(p_n)f(p_n)$

$$= S(p_n)f(x) + S(p_n)(f(p_n) - f(x)) - \int_2^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= S(p_n)f(x) + S(p_n)\int_x^{p_n} f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_2^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = S(p_n)f(x) + \int_x^{p_n} S(p_n)f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_2^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= S(x)f(x) + \int_x^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_2^{p_n} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = S(x)f(x) - \int_2^{x} S(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie 3

Question 1) f est dérivable sur $[2,+\infty[$ et pour tout $t \geqslant 2$, $f'(t) = \dfrac{-1}{t(\ln t)^2}$.

D'après la relation précédente, $\pi(x) = \displaystyle\sum_{p\leqslant x} 1 = \sum_{p\leqslant x} \ln(p)f(p) = \frac{S(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{S(t)}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Or d'après la partie 1, $S(x) = \ln Q(x) \leqslant x\ln 4$ donc $\pi(x) \leqslant \dfrac{x\ln 4}{\ln x} + \displaystyle\int_2^x \frac{t\ln 4}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t = 2\ln 2\left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t\right)$

Question 2)

a) φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $u > 0$, $\varphi'(u) = \dfrac{\mathrm{e}^u}{u^3}(u-2)$.

On remarque que $\varphi(\ln 2) = \dfrac{2}{(\ln 2)^2}$.

Sur $]0,2]$, φ est strictement décroissante donc elle ne prend qu'une seule fois la valeur $\dfrac{2}{(\ln 2)^2}$ en $\ln 2$.

Sur $[2,+\infty[$, φ est strictement croissante, continue et $\varphi(2) < \dfrac{2}{(\ln 2)^2} < \displaystyle\lim_{+\infty}\varphi = +\infty$, donc d'après le th. de la valeur intermédiaire, l'équation $\varphi(u) = \dfrac{2}{(\ln 2)^2}$ possède exactement une solution dans l'intervalle $[2,+\infty[$.

Finalement, il y a deux solutions : $\ln 2$ et α.

b) Soit $z \geqslant \alpha$.

φ est décroissante sur $[\ln 2, 2]$ donc sa valeur maximale sur $[\ln 2, 2]$ est sa valeur en $\ln 2$: $\dfrac{2}{(\ln 2)^2}$.

φ est croissante sur $[2,z]$, donc sa valeur maximale sur $[2,z]$ est sa valeur en z. Or comme $z \geqslant \alpha$ et φ croissante sur $[2,+\infty[$, on en déduit que $\varphi(z) \geqslant \dfrac{2}{(\ln 2)^2}$.

Donc $\displaystyle\max_{[\ln 2, z]} \varphi = \varphi(z)$.

Question 3) Changement de variable $t = \mathrm{e}^u$: $I = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln x} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$.

Comme $x \geqslant \mathrm{e}^\alpha$, $\ln x \geqslant \alpha$ donc d'après l'inégalité précédente et croissance de l'intégrale, $I \leqslant \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln x} \varphi(\ln x)\,\mathrm{d}u = \frac{x}{(\ln x)^2}(\ln x - \ln 2)$.

Question 4) D'après l'inégalité montrée en 1 et la question 3, on en déduit : $\pi(x) \leqslant 2\ln 2\left(\dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{x}{(\ln x)^2}(\ln x - \ln 2)\right)$.

Or $\dfrac{x}{(\ln x)^2}(\ln x - \ln 2) \leqslant \dfrac{x}{\ln x}$ (car $\ln 2 > 0$).

Donc $\pi(x) \leqslant 4\ln 2\dfrac{x}{\ln x}$.

Question 5) Pour $x \in \mathbb{N}$, dans l'intervalle d'entiers $[\![1,x]\!]$, la proportion de nombres premiers est $\dfrac{\pi(x)}{x}$. D'après la question précédente, cette proportion tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Donc plus x grandit, plus la proportion devient petite : il y a de moins en moins de nombres premiers.

Problème 3

Question 1) Note préambulaire : pour alléger les notations, je ne note pas toujours les symboles $\circ$. Ainsi $u^2v(t)$ signifie $u \circ u \circ v(t) = u(u(v(t)))$.

L'inclusion $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u$ est immédiate. De plus, d'après le th. du rang, l'égalité des rangs $\operatorname{rg} = \operatorname{rg} v$ donne l'égalité des dimensions des noyaux, donc finalement on a l'égalité des noyaux.

Question 2) Pour tout $x \in E$, en posant $y = uv(x) - x$, on a $u(y) = u^2v(x) - u(x) = 0$, donc $y \in \operatorname{Ker} u$. Or $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$, donc $v(y) = 0$ donc $vuv(x) - v(x) = 0$. Ceci prouve $v \circ u \circ v = v$.

Question 3) Soit $x \in \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} v$. Il existe $t \in E$ tel que $x = v(t)$ et $u(x) = 0$ car $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

Donc $uv(t) = 0$, donc $vuv(t) = 0$, or $vuv(t) = v(t)$ donc $x = v(t) = 0$.

On a donc prouvé que $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont en somme directe, et grâce au th. du rang d'une part, au th "3 pour le prix de 2" d'autre part, on en déduit $E = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} v$.

Question 4) Pour montrer l'égalité $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$, il suffit d'échanger les rôles de u et v dans la preuve précédente. C'est ce qu'on va justifier.

Soit $x \in E$. Il existe $(a, b) \in \operatorname{Ker} v \times \operatorname{Im} v$ tel que $x = a + b$, puis il existe $t \in E$ tel que $b = v(t)$, donc $x = a + v(t)$.

D'une part, $u(x) = u(a) + uv(t) = uv(t)$ car $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

D'autre part, on a aussi $uvu(x) = uvuv(t)$ or $vuv = v$ donc il vient $uvu(x) = uv(t)$.

Donc finalement $uvu(x) = u(x)$.

Ceci prouve bien que $u \circ v \circ u = u$. Le même raisonnement que dans la question précédente montre en échangeant les rôles de u et v que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Question 5) On choisit une base de chacun des sous-espaces $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ respectivement : $(e_1, \dots, e_r)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$, en notant $r = \operatorname{rg} u$.

Puisque $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$, en réunissant les deux bases, on obtient une base $\mathscr{B}$ de E.

Pour chacun des vecteurs $e_1, \dots, e_r$, on choisit un antécédent par u $a_1, \dots, a_r$. Puis on définit un endomorphisme v de E en donnant l'image d'une base, $\mathscr{B}$ bien sûr :

— si $i \leqslant r$, on pose $v(e_i) = a_i$

— si $i \geqslant r + 1$, on pose $v(e_i) = 0$.

Alors il est évident que les deux endomorphismes u^2v et u transforment la base $\mathscr{B}$ de la même façon, donc ils sont égaux.

De plus, s'il y avait une relation de dépendance linéaire entre les a_i, en en prenant l'image par v, on en aurait une entre les e_i, ce qui est absurde. Donc la famille $(a_1, \dots, a_r)$ est de rang r, autrement dit $\operatorname{rg} v = r \operatorname{rg} u$.

On a donc bien montré ce qu'on voulait.