ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 2

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Résolvez les équations différentielles suivantes sur les intervalles indiqués :

a) $(1+x^2)y' - 2xy = 0$ sur $\mathbb{R}$

b) $xy' - y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

c) $y' - (x+1)(y+1) = 0$ sur $\mathbb{R}$

d) $xy' + y = \sin x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

e) $ty' - 2y = t$ sur $\mathbb{R}_-^*$

f) $xy' + (x-1)y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

g) $(1+t^2)y' + ty = 1 + 2t^2$ sur $\mathbb{R}$

h) $(x^2-1)y' + xy = x^3$ sur $]-1,+1[$

i) $(x-1)y' + xy = \sin x$ sur $]-\infty, 1[$

****2)** Même exercice :

a) $\cos t.y' - \sin t.y = 2\sin^2 t$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

b) $\sin^2 t.y' + \cos t.y = \sin t + \tan^2 t$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

c) $x(x-2)y' - (x+3)y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]2,+\infty[$. Que dire des solutions sur $]0,2[$? Sur $]-\infty,0[$?

d) $(x+5)(x-3)y' + (x+13)y = (x+5)^2$ sur $]3,+\infty[$

e) $(x+5)(x-3)y' + (x+13)y = (x+5)$ sur $]-5,+3[$

f) $(x+5)(x-3)y' + (x+13)y = 1 + \dfrac{5}{x}$ sur $]3,+\infty[$

g) $(x+1)^2 y' - (3x+4)y = 3(x+1)^3$ sur $]-\infty,-1[$.

h) $(x^2-2x+1)y' + xy = \exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ sur $[1,+\infty[$

i) $(x^2-8x+7)y' - (x+11)y = (x-7)^2$ sur $]7,+\infty[$

j) $x(x-1)y' - (3x-1)y = -x^2(x^2+1)$ sur $]0,1[$

*****3)** Résolvez les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $xy' - 2y = -x$

b) $2xy' + y = 7x^3 - 3x$

c) $xy' - y = \dfrac{x}{1+x^2}$

d) $|x|(x^2+1)y' + 2y = -2$

e) $|x|y' + y = s(x)$ où $s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

f) $(1-x^2)y' + 2y = (x-1)^2$

g) $(x-1)(x-2)y' - y = x$

h) $xy' + y = \sin x$

i) $|x|y' + (x-1)y = x^3$ (on pourra chercher des solutions particulières sous la forme $x \mapsto p(x)$ ou $x \mapsto p(x) + \dfrac{k}{x}$ où p est une fonction polynôme de degré 2 et k une constante)

Équations fonctionnelles

****4)** On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

a) Montrez que si f est solution, alors f est la fonction nulle ou f ne s'annule pas. On cherche désormais les solutions qui ne s'annulent pas.

b) Justifiez que si f est solution du problème, alors f est solution d'une équation différentielle linéaire très simple. Déduisez-en f.

c) Précisez les solutions du problème.

****5)** Déterminez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(-x) = e^x$.

****6)** Soit k un réel. Déterminez les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(k-x)$.

****7)** Déterminez les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t + \cos x$.

Exemples de résolution d'équations non linéaires :

****8)** Soit (E) l'équation différentielle $y' = e^{x+y}$. On cherche les solutions définies sur $]-\infty, a[$ où a est un réel fixé. On suppose que f est une telle solution.

a) On pose $g = \exp(-f)$. Calculez g' puis déduisez-en l'expression de g en fonction d'une constante d'intégration qu'on note λ.

b) Justifiez que $\lambda > e^a$.

c) Concluez : déterminez les solutions du problème.

d) L'équation (E) a-t-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

****9)** Soit (E) l'équation différentielle $(1+x^2)y' + xy + y^2 = 0$. On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui ne s'annulent pas. On suppose que f est une telle solution.

a) On pose $f = \dfrac{1}{g}$. Montrez que g est solution d'une équation différentielle linéaire.

b) Montrez que f s'exprime en fonction d'une constante d'intégration qu'on note λ.

c) Montrez que $\lambda \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$.

d) Concluez : déterminez les solutions du problème.

****10)** Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y\tan t - 2\sqrt{y}\cos^2 t$. On cherche les solutions définies sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et qui ne s'annulent pas. On suppose que f est une telle solution.

a) On pose $g = \sqrt{f}$. Montrez que g est solution d'une équation différentielle linéaire.

b) Résolvez cette équation (on note λ la constante d'intégration).

c) Comme $g > 0$ sur I, déduisez-en une condition sur λ.

d) Concluez : déterminez les solutions du problème.

Exemples d'équations linéaires du second ordre à coefficients non constants

***11)** Résolvez l'équation différentielle $(1+x^2)y'' - (3x^2 - 4x + 3)y' + (2x^2 - 6x + 4)y = 0$ en faisant le changement de fonction inconnue $z : x \mapsto (1+x^2)y(x)$.

****12)** Résolvez l'équation différentielle $xy'' - y' - 4x^3y = x^3e^{x^2}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z(x) = y(\sqrt{x})$.

****13)**

a) Soit (a, b, c) trois réels, $a \neq 0$. Montrez que y est solution de l'équation $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $z : t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.

b) Exemples : résolvez l'équation $x^2y'' - xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$; résolvez l'équation $x^2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Déterminez les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall x > 0 \quad f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.