Équations différentielles linéaires

1 Généralités sur les équations différentielles

On appelle équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ toute expression du type

$$(E) : F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

où $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ est une expression algébrique où apparaissent les symboles $x, y, y', ..., y^{(n)}$, x désignant une variable réelle et $y, y', ..., y^{(n)}$ une fonction inconnue et ses dérivées successives.

Définition. I étant un intervalle, on appelle solution de (E) sur I toute fonction f dérivable n fois sur I telle que pour tout $x \in I$, $F\big(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)\big) = 0$

Un cas particulier est les équations différentielles dites « sous forme résolue » :

$$y^{(n)} = H(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Dans ce chapitre on s'intéresse uniquement aux équations linéaires du premier ordre, sous forme résolue exclusivement (les équations linéaires du second ordre à coefficients constants ont déjà été traitées en septembre).

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre (forme résolue)

Définition. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type (E) : $y' + b(x)y = s(x)$, où b, s sont trois fonctions continues sur un intervalle I.
On appelle équation homogène associée l'équation (E_0) : $y' + b(x)y = 0$.

2.1 Résolution de l'équation homogène associée (E_0)

Proposition 1. *Soit B une primitive de b. Alors les solutions sur I de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-B(x)}$ où λ désigne une constante d'intégration.*

Démonstration laissée en exercice. Soit f une solution sur I de l'équation (E_0). On pose $g : x \mapsto e^{B(x)}f(x)$. Montrez que g est constante et concluez. •

Exemples.
- $y' - \tan x\, y = 0$
- $y' + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}y = 0$

2.2 Résolution de l'équation avec second membre (E)

On suppose connaître une solution de l'équation (E) sur I, qu'on appelle solution particulière et qu'on note f_p.
Alors f est une solution sur I de l'équation (E) si et seulement si $f - f_p$ est solution de (E_0).

Théorème 1. *L'équation différentielle étant $y' + b(x)y = s(x)$, on note B une primitive de b et f_p une solution particulière de l'équation.*
Les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto f_p(x) + \lambda e^{-B(x)}$, où λ est une constante (dite constante d'intégration).

Le problème est maintenant de déterminer une solution particulière f_p. Selon la fonction b, cela peut être plus ou moins difficile.
Deux façons de faire au moins :

- on la devine facilement
- on applique la méthode de variation de la constante :
  comme son nom l'indique, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto u(x)e^{-B(x)}$ où u est une fonction inconnue à préciser ;
  on écrit donc $f_p : x \mapsto = u(x)e^{-B(x)}$, on calcule ensuite la dérivée $f_p : x \mapsto u'(x)e^{-B(x)} - u(x)b(x)e^{-B(x)}$ et on remet tout ça dans l'équation ;
  le miracle s'opère !
  les termes en $u(x)$ se simplifient, il reste $u'(x)e^{-B(x)} = s(x)$, donc $u'(x) = s(x)e^{B(x)}$;
  on calcule une primitive de $s\,e^B$, on trouve u puis f_p !
  cela paraît simple en théorie, mais en pratique, il y a un calcul de primitive...
  On apprend la technique, pas le résultat ! Dans une semaine, vous aurez oublié le résultat, pas la technique !

Exemples.
- soit (E) l'équation $y' + xy = 1 + x^2$: on peut facilement voir que la fonction $x \mapsto x$ est solution
- soit (E) l'équation $xy' + y = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
  on résout d'abord l'équation homogène, qui a pour solutions les fonctions $x \mapsto \lambda \frac{1}{x}$
  puis on pose $f_p(x) = u(x)\frac{1}{x}$, on dérive f_p et on remet tout ça dans l'équation, on trouve alors une condition simple, qui est $u'(x) = \sin(x)$, donc on peut choisir $u(x) = -\cos x$, d'où une solution particulière $x \mapsto \frac{-\cos x}{x}$

2.3 Autre méthode de résolution : méthode du facteur intégrant

On multiplie l'équation par une fonction qui ne s'annule pas sur I : l'équation est alors équivalente à

$$\phi(x)y' + b(x)\phi(x)y = \phi(x)s(x)$$

On cherche un facteur intégrant, c'est-à-dire une fonction ϕ telle que $\phi(x)y' + b(x)\phi(x)y$ soit égal à $\frac{d}{dx}(\phi(x)y) = \phi(x)y' + \phi'(x)y$.

Il suffit donc que $\phi(x)b(x) = \phi'(x)$, *i.e.* $\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = b(x)$. On reconnaît la dérivée de la fonction $\ln \circ |\phi|$.

Il suffit donc que $x \mapsto \ln|\phi(x)|$ soit une primitive de b. En notant B une telle primitive, il suffit alors de choisir $\phi : x \mapsto e^{B(x)}$.

Ce choix étant fait, l'équation est alors équivalente à $\frac{d}{dx}(e^{B(x)}y(x)) = e^{B(x)}s(x)$. On est de nouveau ramené à calculer une primitive : soit S une primitive particulière de $e^B s$, on a alors $e^B y = S + \lambda$ où λ est une constante d'intégration, donc $y = \lambda e^{-B} + S\,e^{-B}$.

Notez que cela revient finalement au même : on a les mêmes primitives à calculer ! Pas de méthode miracle à espérer ! Simplement, on traite en même temps ce qui était traité séparément avant (équation homogène ; équation avec second membre).

3 Supplément : équations linéaires du premier ordre sous forme générale

Soit $(E) : a(x)y' + b(x)y = s(x)$.

Une méthode de résolution est :
- déterminer les racines de a ;
- sur chaque intervalle où a ne s'annule pas, écrire l'équation sous forme résolue :
  $(F) : y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{s(x)}{a(x)}$ et la résoudre ;
- raccorder les solutions aux points d'annulation de a, en utilisant deux conditions :
  - les deux solutions à gauche et à droite sont continues au point de raccordement
  - les deux solutions à gauche et à droite sont dérivables au point de raccordement

Remarque. Il n'y a aucun résultat général dans le cas des équations sous forme non résolues : l'ensemble des solutions peut être vide ou un singleton ou contenir une infinité d'éléments...

Exemples.

— résolution de l'équation $xy' + y = e^x$
— résolution de l'équation $x^2y' + y = 2$
— résolution de l'équation $(1 - x^2)y' + 2y = x - 1$

4 Problème de Cauchy

Étant donnée une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $a(x)y' + b(x)y = s(x)$, où a, b, s sont continues sur un intervalle I, on appelle problème de Cauchy la question suivante : pour tout $t_0 \in I$ et $v_0 \in \mathbb{C}$, existe-t-il une unique solution de l'équation (E) de condition initiale $y(t_0) = v_0$?

La réponse est affirmative dans le cas où $a(t_0) \neq 0$.

En revanche, quand $a(t_0) = 0$, tout peut se passer, il n'y a aucun résultat général.