Si une fonction est bornée sur $\mathbb{R}$, on note $||f||_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

Partie 1 - Noyaux de Dirichlet et de Fejer

Soit $n \in \mathbb{N}$, $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx}$ et $F_n(x) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x)$.

Question 1) Donnez une expression de $D_n(x)$ à l'aide de $\sin(2n+1)\dfrac{x}{2}$ quand $x \not\equiv 0\ [2\pi]$.

Question 2) Déduisez-en que $F_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$ quand $x \not\equiv 0\ [2\pi]$.

Question 3) Montrez les trois propriétés suivantes :
- F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et positive ;
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n = 2\pi$;
- pour tout $\alpha \in]0,\pi]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{\pi} F_n = 0$.

On dit que la suite de fonctions $\left(\dfrac{1}{2\pi}F_n\right)$ est une approximation de l'unité.

Partie 2 - Convolution

Soit E le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

Si $(f,g) \in E^2$, on pose $f * g : x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 1) Soit $(f,g) \in E^2$.

a) Montrez que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et que g est bornée : on note $M = \sup_{\mathbb{R}} |g|$.

b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrez que $|f*g(x) - f*g(y)| \leqslant \dfrac{M}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x-t) - f(y-t)|\,\mathrm{d}t$.

c) Montrez que $*$ est une loi de composition interne dans E.

Question 2) Montrez que $*$ est commutative et distributive pour $+$. On peut montrer que $*$ est associative et que $*$ ne possède pas de neutre.

Question 3) Montrez en vous inspirant de ce qui précède que si l'une des deux fonctions f ou g est de classe C^1 (disons f par exemple), alors $f*g$ est aussi de classe C^1 et que $(f*g)' = f' * g$. Déduisez-en que si f est de classe C^k (pour n'importe quelle valeur de k), alors $f*g$ l'est aussi.

Partie 3 - Approximation

Soit $f \in E$. On pose $f_n = f * F_n$.

Question 1) Montrez que la suite (f_n) est une suite de fonctions de classe C^∞ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f, c'est-à-dire que $||f - f_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On a donc montré le théorème suivant :

l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et 2π-périodiques est dense dans E.

Question 2) Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Montrez qu'il existe une suite de fonctions de classe C^∞ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $[a,b]$ (définition similaire).