Problème 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$. Dans ce problème, on considère la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, autrement dit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Partie 1 - Étude de la fonction F

Question 1)

a) Vérifiez que F est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminez le sens de variation et la parité de F.

Question 2)

a) Vérifiez l'existence d'un réel $A > 0$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer) tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ t \geqslant A \Longrightarrow 0 < e^{-t} < \frac{1}{t}.$$

b) Montrez alors que F est majorée sur $\left[\sqrt{A}; +\infty\right[$.

c) Déduisez-en que F admet une limite finie (que l'on ne cherchera pas à déterminer) en $+\infty$.

Partie 2 - Valeur de la limite de F en $+\infty$

On cherche à déterminer la limite de F en $+\infty$. On note encore A le réel défini dans la partie précédente. On introduit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ u(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Question 1)

a) Vérifiez que la fonction u est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \geqslant A$, démontrez que

$$0 \leqslant u(x) \leqslant \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

c) Déduisez-en que u admet une limite finie en $+\infty$.

Question 2)

a) Montrez que tout réel α vérifie la relation

$$e^\alpha = 1 + \alpha + \int_0^\alpha (\alpha - t)e^t dt.$$

b) Démontrez, pour tout $\alpha \in [-2; 2]$, l'encadrement

$$0 \leqslant \int_0^\alpha (\alpha - t)e^t dt \leqslant \frac{1}{2}\alpha^2 e^2.$$

c) Pour cette question et les deux suivantes, x est un réel fixé.
Pour tout réel $h \neq 0$, écrivez sous forme d'une intégrale (que l'on ne cherchera pas à calculer) la quantité

$$\Delta(h) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.$$

d) Déduisez des questions précédentes que $\Delta(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

e) Montrez alors que u est dérivable en x et calculer $u'(x)$.

Question 3) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction auxiliaire v par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ v(x) = u(x^2)$.

a) Calculez $v(0)$.

b) Vérifiez que v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ v'(x) = -2F(x)F'(x).$$

Question 4)

a) Exprimez alors $F(x)$ à l'aide de $v(x)$ pour tout réel x positif.

b) Retrouvez que F admet une limite finie en $+\infty$ et donnez la valeur de cette limite, notée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.