Problème 1 - Sommes lacunaires

Une somme indexée de 0 à n est dite lacunaire quand elle comporte des trous (des lacunes), c'est-à-dire quand un certain nombre de termes sont nuls, ou ce qui revient au même, quand l'indice ne prend pas toutes les valeurs de 0 à n.

Question 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $q_n = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.

a) Calculez $p_n + q_n$.
b) En développant $(1+(-1))^n$, montrez que $p_n = q_n$.
c) Déduisez-en p_n et q_n.

Question 2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} (-1)^{k/2}$ et $b_n = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} (-1)^{(k-1)/2}$.

i désigne ici le nombre complexe habituel.
a) Montrez que $a_n + ib_n = (1+i)^n$.
b) Déduisez-en a_n et b_n.
c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $a_n = b_n$?

Question 3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on sépare les entiers de 0 à n en trois parties : Z_n est l'ensemble des tels entiers multiples de 3, U_n est celui des entiers de la forme $3r+1$ où $r \in \mathbb{N}$ et D_n celui des entiers de la forme $3r+2$.

Par exemple, avec $n = 7$, $Z_7 = \{0,3,6\}$, $U_7 = \{1,4,7\}$, $D_7 = \{2,5\}$.

On note $z_n = \sum\limits_{k \in Z_n} \binom{n}{k}$, $u_n = \sum\limits_{k \in U_n} \binom{n}{k}$ et $d_n = \sum\limits_{k \in D_n} \binom{n}{k}$.

a) Montrez que $z_n + ju_n + j^2 d_n = (1+j)^n$.
b) Plus généralement, donnez un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues dont la solution est le triplet (z_n, u_n, d_n).
c) Donnez des expressions simples de z_n, u_n et d_n en fonction de n.

Problème 2 - Des inégalités classiques

Soient p et q deux réels > 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ des réels strictement positifs.

On souhaite démontrer l'inégalité suivante qui porte le nom de **l'inégalité de Hölder** :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Question 1)

a) Montrez que : $\forall x, y > 0$, $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
b) On pose $A = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$ et $B = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$. Appliquez le résultat précédent avec $\frac{x_k}{A}$ et $\frac{y_k}{B}$ et déduisez-en l'inégalité de Hölder.
c) Que peut-on dire si on remplace l'hypothèse « $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ des réels strictement positifs » par « $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ des réels positifs » ?

Question 2) Démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels. On a : $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} \times \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}$

Question 3) Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. On note $m(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ la moyenne (dite arithmétique) des a_i et $h(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{m\left(\frac{1}{a_1}, \cdots \frac{1}{a_n}\right)}$ la moyenne harmonique.

Montrez que la moyenne harmonique est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique.

Question 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs.

a) Montrez que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} a_p \times \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}$.

b) Déduisez-en l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4 \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{p^2}{a_p} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \right)$.

c) Vérifiez que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

d) Concluez : prouvez l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.

Problème 1

Question 1)

a) $p_n + q_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}$ car tout entier est soit pair, soit impair.

On reconnaît la formule du binôme : $p_n + q_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

b) $0^n = (1 + (-1))^n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

Or $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair. Donc $0 = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} = p_n - q_n$.

Donc $p_n = q_n$.

c) On en déduit que $p_n = q_n = 2^{n-1}$.

Question 2)

a) $(1+i)^n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} i^k$. Or $i = e^{i\pi/2}$ donc

$i^k = e^{i\pi k/2} = (e^{i\pi})^{k/2} = (-1)^{k/2}$ quand k est pair donc quand $k/2$ est entier,

et $i^k = e^{i\pi k/2} = ie^{i\pi(k-1)/2} = i(e^{i\pi})^{(k-1)/2} = i(-1)^{(k-1)/2}$ quand k est impair docn quand $(k-1)/2$ est entier.

Attention ! la notation z^a n'a pas de sens quand z est un complexe non réel positif et a non entier. Donc je ne fais apparaître que des exposants entiers !

Donc en séparant les termes pairs et impairs, on obtient

$(1+i)^n = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} (-1)^{k/2} + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} i(-1)^{(k-1)/2} = a_n + ib_n$.

b) Or a_n et b_n sont des réels, donc ce sont les parties réelle et imaginaire de $(1+i)^n$.

$1 + i = 1 + e^{i\pi/2} = 2\cos\frac{\pi}{4} e^{i\pi/4} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ donc $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4}$.

Donc $a_n = (\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4}$ et $b_n = (\sqrt{2})^n \sin n\frac{\pi}{4}$.

c) $a_n = b_n$ si et seulement si $\cos n\frac{\pi}{4} = \sin n\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{4}\right)$

si et seulement si $n\frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $n\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

La deuxième congruence est impossible, il reste donc $2n\frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, ce qui revient à $n \equiv 1\ [4]$.

Question 3)

a) Sachant que $j^3 = 1$, alors pour $k \in Z_n$, on a $j^k = 1$; pour $k \in U_n$, $j^k = j$; pour $k \in D_n$, $j^k = j^2$.

Donc $z_n + ju_n + j^2 d_n = \sum_{k \in Z_n} \binom{n}{k} j^k + \sum_{k \in U_n} \binom{n}{k} j^k + \sum_{k \in D_n} \binom{n}{k} j^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = (1+j)^n$ car la réunion des trois ensembles $Z_n \cup U_n \cup D_n$ est exactement l'ensemble des entiers de 0 à n.

b) De même, on a aussi $z_n + u_n + d_n = (1+1)^n = 2^n$ (même raisonnement que dans la question 1) et $z_n + j^2 u_n + j d_n = (1+j^2)^n$ (qui est la conjuguée de la relation prouvée en a.).

Le triplet (z_n, u_n, d_n) est donc solution du système linéaire suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 2^n \\ x + jy + j^2 z & = & (1+j)^n \\ x + j^2 y + jz & = & (1+j^2)^n \end{array}\right.$.

c) On simplifie d'abord $(1+j)^n = (-j^2)^n = e^{i\,n\pi/3}$ et $(1+j^2)^n = e^{-i\,n\pi/3}$.

Puis on résout le système linéaire.

On trouve d'abord

$z_n = \frac{1}{3}\left(2^n + (-j)^n + (-j^2)^n\right)$, $u_n = \frac{1}{3}\left(2^n + j^2(-j^2)^n + j(-j)^n\right)$, $d_n = \frac{1}{3}\left(2^n + j(-j^2)^n + j^2(-j)^n\right)$

puis $z_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$, $u_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$, $d_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$.

Problème 2

Question 1)

a) On fixe $y>0$ et on fait varier x : on considère donc la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - xy$.

Alors $f'(x) = x^{p-1} - y$ donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = y^{1/(p-1)}$. On note $a = y^{1/(p-1)}$ pour simplifier.

La fonction f' est clairement négative sur $]0, a]$ et positive sur $[a, +\infty[$, donc f admet un minimum en a, qui vaut $f(a) = \dfrac{ay}{p} + \dfrac{y^q}{q} - ay = ay\left(1 - \dfrac{1}{p}\right) + \dfrac{y^q}{q} = -\dfrac{ay}{q} + \dfrac{y^q}{q} = \dfrac{y}{q}(y^{q-1} - a)$.

Or $y = a^{p-1}$ donc $y^{q-1} = a^{(p-1)(q-1)}$ et un petit calcul montre que $(p-1)(q-1) = 1$ grâce à la relation $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, donc $y^{q-1} = a$.

Donc finalement, $f(a) = 0$. La fonction f a donc pour minimum 0, ce qu'on voulait démontrer.

b) D'après la question précédente, on a donc $\dfrac{x_k}{A} \times \dfrac{y_k}{B} \leqslant \dfrac{1}{p}.\dfrac{x_k^p}{A^p} + \dfrac{1}{q}.\dfrac{y_k^q}{B^q}$.

Puis on additionne ces n inégalités, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{A} \times \frac{y_k}{B}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{p}.\frac{x_k^p}{A^p} + \frac{1}{q}.\frac{y_k^q}{B^q}\right)$.

Donc $\displaystyle\frac{1}{AB}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \frac{1}{p}.\frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{A^p} + \frac{1}{q}.\frac{\sum_{k=1}^n y_k^q}{B^q} = \frac{1}{p}.\frac{A^p}{A^p} + \frac{1}{q}.\frac{B^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Donc finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant A \times B = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$

c) Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ sont prolongeables par continuité en 0 quand $\alpha > 0$ par $0^\alpha = 0$. Si certains nombres sont nuls, ça ne change donc rien, l'inégalité reste vraie.

Question 2) On applique l'inégalité précédente avec $p = q = 2$ et $x_k = |a_k|$, $y_k = |b_k|$:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or d'après l'inégalité triangulaire, on a $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$,

donc $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Question 3) D'après l'inégalité précédente, $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\sqrt{\frac{1}{a_k}}\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{a_k}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Donc $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} 1\right| = n \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Les deux membres de l'inégalité sont positifs, donc on peut tout passer au carré, ça ne change pas l'inégalité :

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right).$$

Ou encore $n^2 \leqslant n\, m(a_1, \dots, a_n) \times \dfrac{n}{h(a_1, \dots, a_n)}$, donc finalement $1 \leqslant m(a_1, \dots, a_n) \times \dfrac{1}{h(a_1, \dots, a_n)}$, c'est-à-dire $h(a_1, \dots, a_n) \leqslant m(a_1, \dots, a_n)$.

Question 4)

a) On utilise l'inégalité de la question 2. sur les réels positifs $\sqrt{a_p}$ et $\dfrac{p}{\sqrt{a_p}}$, on obtient

$$\left(\sum_{p=1}^{k} \sqrt{a_p} \times \frac{p}{\sqrt{a_p}}\right)^2 \leqslant \sum_{p=1}^{k} (\sqrt{a_p})^2 \times \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{p}{\sqrt{a_p}}\right)^2$$

Autrement dit, $\displaystyle\left(\sum_{p=1}^{k} p\right)^2 \leqslant \sum_{p=1}^{k} a_p \times \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}$, donc $\displaystyle\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \leqslant \sum_{p=1}^{k} a_p \times \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}$.

b) D'après l'inégalité précédente, on en déduit que $\dfrac{k}{\sum_{p=1}^k a_p} \leqslant \dfrac{4}{k(k+1)^2} \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}$, ceci étant valable pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

On additionne ces inégalités, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p} \right)$.

On reconnaît une somme triangulaire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{k(k+1)^2} \frac{p^2}{a_p} \right) = \sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k(k+1)^2} \frac{p^2}{a_p}$.

On intervertit les sommations : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k(k+1)^2} \frac{p^2}{a_p} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \frac{p^2}{a_p} \right) = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{p^2}{a_p} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \right)$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4 \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{p^2}{a_p} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \right)$.

c) Par équivalences successives : pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$\dfrac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} \iff 2k \leqslant (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$

Or l'inégalité $2k \leqslant 2k+1$ est vraie, donc l'inégalité $\dfrac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$ est vraie aussi.

d) D'après l'inégalité précédente, on peut majorer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}$ par $\displaystyle\frac{1}{2} \sum_{k=p}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$ et on reconnaît une somme télescopique : $\displaystyle\frac{1}{2} \sum_{k=p}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \leqslant \frac{1}{2p^2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4 \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{p^2}{a_p} \frac{1}{2p^2} \right) = 2 \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{a_p}$.