INTÉGRALES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Montrez que $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}\lfloor x^2 \rfloor\right)$ définie sur $[0, 2]$ est en escalier. Calculez son intégrale.

***2)** Soit $f : x \mapsto x\lfloor x^2 \rfloor$. Tracez le graphe de f sur $[0, \sqrt{3}]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Justifiez l'existence de I_n et ensuite calculez I_n.

****3)** Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \min(x, a)\,\mathrm{d}x$ et $J(a) = \displaystyle\int_0^1 |x - a|\,\mathrm{d}x$.

***4)** Soit $f : t \mapsto \dfrac{t}{1 + t^3}$ définie sur $[0, 1]$.

En encadrant f par deux fonctions affines, montrez que $\dfrac{1}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^1 f \leqslant \dfrac{1}{2}$.

****5)** Montrez les inégalités suivantes (ou des encadrements meilleurs encore) :

a) $\dfrac{\pi}{8} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \arctan t\ \mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{8} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x}{3 + x^3}\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{6}$ c) $\dfrac{27}{66} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{2 + t^4}\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{15}{32}$

****6)** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x + t^5}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrez que f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminez la limite de f en $+\infty$.

c) Montrez que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{|x - y|}{xy}$. Déduisez-en que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{-1}{(x + t^5)^2}\,\mathrm{d}t$.

****7)** Soit f une fonction K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$.

Montrez que F est $\dfrac{K}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Application : on pose $f = \cos$, montrez que $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ (prolongée en 0 comme il faut) est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

****8)** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \dfrac{1}{2}$. Montrez que f a un point fixe.

****9)** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4$. Montrez que $f = 0$ ou $f = 1$ sur $[a, b]$ (on pourra étudier $f^2(1 - f)^2$).

****10)** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b |f|$. Montrez que f est positive sur $[a, b]$.

****11)** Soit f une fonction continue et positive sur $[0, 1]$. Soit $A = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrez que

$$\sqrt{1 + A^2} \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + f(x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + A.$$

****12)** Soit f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x g$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x f$.

Montrez que f et g sont nulles sur $\mathbb{R}$.

****13)** Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = 0$ et $0 \leqslant f' \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x f^3 \leqslant \left(\int_0^x f\right)^2$.

****14)** Soit f, g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que f soit décroissante sur $[0,1]$ et g à valeurs dans $[0,1]$. On pose $a = \displaystyle\int_0^1 g$.

a) On pose F, H des primitives de f, fg respectivement et G la primitive de g qui s'annule en 0. Exprimez $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{\int_0^x g} f - \int_0^x fg$ à l'aide des fonctions F, G, H.

b) Montrez que $\displaystyle\int_0^1 fg \leqslant \int_0^a f$.

c) Montrez de même que $\displaystyle\int_{1-a}^1 f \leqslant \int_0^1 fg$.

****15)** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrez que si f est paire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^a f = \int_{-a}^0 f = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f$.

b) Montrez un résultat analogue si f est impaire

c) Montrez que si f est $T-$périodique, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f$ ne dépend pas de a .

****16)** Pour $n \in N$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$. Comparez $\displaystyle\int_0^1 \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right] \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Que peut-on conclure sur cet exemple ?

****17)** Soit f de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

****18)** Soit g de classe C^2 sur $[0,1]$. Montrez que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{g(0)+g(1)}{2} + \int_0^1 t(1-t)g''(t)\,\mathrm{d}t$.

****19)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

a) Montrez que la suite (u_n) converge.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{(n+1)}{2}u_n$.

c) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{e^2}{n+1}$ et déterminez la limite de u_n ainsi qu'un équivalent simple.

****20)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$

a) Calculez u_0, u_1.

b) Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+t}$, montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$

c) Montrez que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leqslant \dfrac{1}{2}(1-t)$. Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1} - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$, et déterminez la limite et un équivalent de u_n

d) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1+t)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{2}}{n+1} - \frac{3}{2(n+1)}u_{n+1}$. En comparant la position de u_n et u_{n+1}, montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n + \frac{7}{2})u_n \geqslant 2\sqrt{2}$ et retrouvez les limite et équivalent de u_n.

****21)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{e}{n-1}$, puis donnez la limite de (v_n).

b) Déterminez une relation entre v_n et v_{n+1}.

c) Donnez un équivalent de v_n.

****22)** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x(-\ln x)^n$ pour $x \in \,]0,1]$ et $f_n(0) = 0$.

a) Étudiez la continuité et la dérivabilité de f_n sur $[0,1]$.

b) Étudiez les variations de f_n.

c) Montrez que pour tout $x \in [0, e^{-n}]$, $f_n(x) \geqslant e^{-n} n^n x$.

d) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n \geqslant \frac{1}{2} n^n e^{-3n}$. Déduisez-en $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$.

****23)**

a) Montrez que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}\exp(\dfrac{-1}{t})$ est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrez que la fonction $\alpha \mapsto \displaystyle\int_\alpha^1 f$ est continue sur $[0,1]$.

c) Calculez $\displaystyle\int_\alpha^1 f$ pour $\alpha \in \,]0,1]$. Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f$.

****24)** Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminez l'ensemble de définition de f, puis son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Justifiez que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudiez ses variations.

c) Montrez que pour tout $x > 0$, $f(x) = f(\dfrac{1}{x})$.

d) Montrez que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{\ln t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t^2} \leqslant 2t^{-3/2}$. Déduisez-en que f est majorée sur $[1, +\infty[$ et qu'elle admet une limite réelle en $+\infty$.

e) Montrez que f est prolongeable par continuité en 0. f ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?

f) Tracez la courbe de f (on admettra que qu'une valeur de $f(0)$ à 10^{-1} prés est 0,9)

****25)** Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Étudiez la parité de f.

b) Étudiez les variations de f sur $]0, +\infty[$. En particulier, montrez que f a un minimum strictement positif.

c) Montrez que pour tout $t > 0$, $\ln(1+t^2) \leqslant t^2$. Déduisez-en que pour $x > 0$, $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2x}$ et la limite de f en 0 par valeurs supérieures.

d) Montrez que pour tout $x > 0$, $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.

e) Tracez l'allure de la courbe représentative de f.

****26)** Montrez que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ a une limite réelle en $+\infty$.

****27)** Calculez la limite des suites suivantes :

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{na+kb}$ où $(a,b) \in \,]0, +\infty[^2$

b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}$

d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$

e) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(n+k)^2}$

f) $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2nj}}$

g) $u_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \left(1+\frac{p}{n}\right)^{1/n}$

h) $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-p^2}}$

i) $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$

*****28)** Soit $F : t \mapsto \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u}\,\mathrm{d}u$.

a) Déterminez l'ensemble de définition de F.

b) Soit $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{\ln u} - \dfrac{1}{u-1}$. Montrez que φ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

c) Montrez que $\displaystyle\lim_{t\to 1} \int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u}\,\mathrm{d}u = \ln 2$ (on pourra écrire $\dfrac{1}{\ln u} = \varphi(u) + \dfrac{1}{u-1}$).

d) Montrez que pour tout $t \in]1,+\infty[$, $\dfrac{t^2-t}{2\ln t} \leqslant \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{t^2-t}{\ln t}$. Déduisez-en $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u}\,\mathrm{d}u$.

e) Étudiez la fonction F (on la prolongera par continuité chaque fois que c'est possible) et donnez l'allure de sa courbe représentative.

f) Soit $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$, prolongée par continuité en 0 et en 1. Montrez que pour tout $t \in]0,1[$, $\displaystyle\int_0^t f = F(t)$.

Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f$.

*****29)** Étudiez la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\ln t}{2t-1}\,\mathrm{d}t$.

*****30)** Soit f continue sur $[0,1]$. Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t = f(0)$.

*****31)** Soit f continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b |f(t)|^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n} = \sup_{[a,b]} |f|$.

*****32)** Lemme de Lebesgue. Soit a, b deux réels tels que $a<b$.

a) Soit f en escaliers sur $[a,b]$. Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) Soit f continue sur $[a,b]$. Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

*****33)** Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) \neq 0$.

a) Montrez que $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\pi f(0)}{4x}$ quand x tend vers 0_+.

b) Montrez que si f est bornée, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\pi f(0)}{2x}$ quand x tend vers 0_+.

*****34)** Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad \int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrez que f s'annule au moins $(n+1)$ fois sur $[a,b]$.

****35)** Déterminez les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

****36)** Déterminez les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = 1$.

****37)** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrez que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa dérivée.

b) Même question avec $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$.

****38)** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et ne s'annulant pas. Pour $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

Montrez que $f = f(a) \exp \circ g$ et déduisez-en que si $f(a) = f(b)$, alors $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ est un entier relatif.

****39)** Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p (\ln x)^q\,\mathrm{d}x$.

a) Justifiez l'existence de ces intégrales.

b) Pour $q \geqslant 1$, exprimez $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$.

c) Déterminez la valeur de $I_{n,n}$ en fonction de n ($n \in \mathbb{N}^*$).

****40)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{2n} t\,\mathrm{d}t$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Calculez la valeur de $u_n + u_{n+1}$ en fonction de n.

b) Montrez que la suite u converge vers 0.

c) Exprimez s_n en fonction de u_0 et u_n. Déduisez-en $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n$.

****41)** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

On pose $B_{a,b}(p, q) = \displaystyle\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q\,\mathrm{d}x$, $I(p, q) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x\,\mathrm{d}x$.

a) Montrez que si $q > 0$, alors $B_{a,b}(p, q) = \dfrac{q}{p+1} B_{a,b}(p+1, q-1)$. Déduisez-en une expression de $B_{a,b}(p, q)$ en fonction de a, b, p, q.

b) Dans cette question seulement on pose $a = -1$, $b = 1$, $p = q = n$: montrez que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

c) En effectuant un changement de variables, calculez $I(p, q)$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x$. Montrez que $I(n, n) = \dfrac{1}{2^{2n+2}}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u$, puis exprimez J_n en fonction de $I(n, n)$, déduisez-en la valeur de J_n.

****42)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin(nx) \cos^n x\,\mathrm{d}x$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) On pose $f_n(t) = \dfrac{1-(1-t)^n}{t}$ si $t \neq 0$ et $f_n(0) = n$. Justifiez que f_n est une fonction continue sur $[0, 1]$.

b) On pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrez que $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{n+1}$ puis que $v_n = s_n$.

c) Montrez que $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$.

d) Montrez que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin(2nx)\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4n}$.

e) Calculez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin(2kx)$ en fonction de n et x.

f) Déduisez-en que $u_n = \dfrac{\pi}{2^{n+2}} s_n$.

****43)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}u_n + \dfrac{1}{n2^{n+1}}$.

b) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} - 2u_{n+1} + \frac{\pi}{2}$.

c) Montrez que u converge vers 0.

d) Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} = \int_0^{1/2} \frac{1-x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$, déduisez-en sa limite quand n tend vers $+\infty$.

e) Quelle est la limite de s_n quand n tend vers $+\infty$.

****44)** Soit f une fonction continue sur I (intervalle), $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrez que F est une primitive n-ème de f sur I, c'est-à-dire que F est n fois dérivable sur I et $F^{(n)} = f$ sur I.

****45)** Montrez que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

****46)** Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

a) $e^x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ b) $\cos x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ c) $\sin x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

****47)** Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées. On note $M_0 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f''|$.

a) Montrez que pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2} M_2$ et $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{2} M_2$.

b) Déduisez-en que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{h}{2} M_2$.

c) Montrez que f' est aussi bornée sur $\mathbb{R}$ et que $M_1 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f'| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

*****48)** Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

- $\triangleright$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$
- $\triangleright$ il existe $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(t)| \leqslant a^n n!$

a) Montrez que f est la fonction nulle sur $\left[-\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a}\right]$.

b) Montrez que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

*****49)** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrez que $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geqslant 0$.