Construction de l'intégrale

1 Norme sup

Dans cette section, a et b sont deux réels tels que $a < b$ et $\mathscr{B}$ désigne l'ensemble des fonctions (à valeurs réelles) bornées sur $[a, b]$.

Définition. Soit $f \in \mathscr{B}$. On appelle norme sup (ou norme infini) de f le réel $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Cette définition est cohérente, puisque cette borne supérieure existe.

Proposition 1. *L'application norme sup de $\mathscr{B}$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifie les propriétés suivantes :*
- *pour tout $f \in \mathscr{B}$, $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$*
- *pour tout $f \in \mathscr{B}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$*
- *pour tout $(f, g) \in \mathscr{B}^2$, $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$*

Définition. Soit (f_n) une suite à termes dans $\mathscr{B}$ et $f \in \mathscr{B}$. On dit la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f quand la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ converge vers 0.

Proposition 2. *Soit (f_n), (g_n) deux suites à termes dans $\mathscr{B}$, qui convergent uniformément vers f et g respectivement, et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *la suite $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers $f + g$*
- *la suite (λf_n) converge uniformément vers λf*

2 Continuité uniforme

2.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Formellement, on peut l'écrire sous la forme

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall t \in I \quad |t - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Dans cette définition apparaît un nombre η qui dépend *a priori* de ε et aussi de x.

Dans bien des cas, il serait plus facile que η ne dépende pas de x. Par exemple, si f est K-lipschitzienne sur I, alors on peut choisir un nombre η indépendant de x.

Mais toutes les fonctions continues ne sont pas forcément lipschitziennes, on introduit donc une nouvelle catégorie de fonctions.

Définition. Soit I un intervalle, f une fonction définie sur I.

On dit que f est uniformément continue sur I quand dans la définition précédente, il existe un choix de η qui ne dépend que de ε.

Autrement dit
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad \forall t \in I \quad |t - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Il est évident qu'une fonction uniformément continue sur I est aussi continue sur I, mais la réciproque est fausse en général (voir exercice ci-dessous).

2.2 Théorème de Heine

En fait, la différence entre continuité et continuité uniforme n'apparaît vraiment que sur des intervalles qui ne sont pas des segments, à cause du théorème suivant dû à Heine.

Théorème 1. *Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.*

La démonstration utilise le fameux théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercices **:**

1) Montrez que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrez que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

3 Fonctions continues par morceaux

3.1 Subdivisions d'un segment

Définition. Soit a, b deux réels tels que $a < b$.
On appelle subdivision de $[a, b]$ tout $n+1$-uplet $(c_0, \ldots, c_n) \in [a, b]^{n+1}$ tel que $c_0 = a < c_1 < \ldots < c_n = b$.
Si $\sigma = (c_0, \ldots, c_n)$ est une subdivision de $[a, b]$, on note souvent $|\sigma|$ le nombre $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |c_{i+1} - c_i|$, appelé le module de la subdivision.

Une subdivision σ est dite plus fine qu'une autre subdivision τ quand les points de τ sont aussi des points de σ, ce qui revient à dire que l'ensemble des points de τ est inclus dans celui de σ. Par abus de notation, on note alors $\tau \subset \sigma$.

Étant donné deux subdivisions σ et σ' de $[a, b]$, on peut construire une subdivision plus fine que les deux en réunissant les points de σ et ceux de σ' et en les ordonnant dans le sens croissant : cette subdivision est appelée réunion des deux subdivisions et est notée par abus $\sigma \cup \sigma'$.

3.2 Fonctions continues par morceaux

Définition. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$.
On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ quand il existe une subdivision $(c_0, \ldots, c_n)$ de $[a, b]$ telle que

— pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur l'intervalle ouvert $]c_i, c_{i+1}[$;
— f a une limite réelle en a à droite, en b à gauche et des limites réelles à gauche et à droite en chaque point c_i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Toute subdivision qui convient dans cette définition est dite adaptée à f.

Si on ajoute des points à une subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux, alors on obtient toujours une subdivision adaptée.

À l'inverse, il existe une plus petite subdivision adaptée à f : elle est unique et on l'appelle la subdivision réduite adaptée à f. Elle est obtenue en supprimant de toute subdivision adaptée à f les points intérieurs au segment $[a, b]$ où f est continue des deux côtés. Propriété remarquable : toute subdivision adaptée à f contient la subdivision réduite adaptée à f.

Dans toute la suite, on note $C^0_m([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$ (et à valeurs réelles).

Proposition 3. *L'ensemble $C^0_m([a, b])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.*

3.3 Fonctions en escaliers

Définition. Une fonction en escaliers sur un segment $[a, b]$ est une fonction f continue par morceaux particulière : si $(c_0, \ldots, c_n)$ est une subdivision adaptée à f, alors f est constante sur chaque intervalle ouvert $]c_i, c_{i+1}[$.

L'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est noté $\mathscr{E}([a, b])$.

Proposition 4. *L'ensemble $\mathscr{E}([a,b])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.*

3.4 Approximation par les fonctions en escaliers

Théorème 2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.*
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers φ et ψ sur $[a,b]$ telle que

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) - \varepsilon \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$$

Ce qui revient à dire : pour toute suite de réels strictement positifs (ε_n) qui converge vers 0, il existe deux suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et $\|\varphi_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$, $\|\psi_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$.

En particulier, cela prouve l'existence de suites de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers une quelconque fonction continue par morceaux sur un segment.

4 Construction d'une intégrale

4.1 Intégrale des fonctions en escaliers

L'intégrale d'une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$ est l'aire algébrique de la région du plan comprise entre les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ et entre l'axe des abscisses et la courbe de la fonction. *Algébrique,* car les parties au-dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement et celles en dessous sont comptées négativement :

Définition. Soit $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, $(c_0, \dots, c_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à ϕ. On définit l'intégrale de ϕ sur le segment $[a,b]$ par

$$\int_{[a,b]} \phi = \sum_{k=1}^{n} y_k \,(c_k - c_{k-1})$$

où y_k est la valeur prise par ϕ sur l'intervalle $]c_{k-1}, c_k[$.
On note également cette intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} \phi(x)\,\mathrm{d}x$.

Cette définition est en fait légèrement ambigüe : il faudrait prouver que si on change de subdivision adaptée à ϕ, alors la valeur de la somme précédente ne change pas, ce qui permet de la définir uniquement en fonction de ϕ et pas de la subdivision elle-même.
Avec cette définition, il est quasiment immédiat que :
- l'intégrale des fonctions en escaliers est linéaire ;
- l'intégrale est croissante : si $\varphi \leqslant \psi$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$;
- $\displaystyle\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| \leqslant (b-a)\,\|\varphi\|_\infty$;
- l'intégrale vérifie la relation de Chasles : si $a < c < b$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$.

Pour le démontrer, il suffit de choisir une subdivision adaptée aux deux fonctions à la fois.

4.2 Parties adjacentes

Définition. Soit A, B deux parties de $\mathbb{R}$. On dit qu'elles sont adjacentes quand
- A et B sont non vides
- $A \leqslant B$: pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a \leqslant b$
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $0 \leqslant b - a \leqslant \varepsilon$.

Exemples.

- pour tout $m \in \mathbb{R}$, les intervalles $]-\infty, m]$ et $[m, +\infty[$ sont adjacents, ainsi que $]-\infty, m[$ et $]m, +\infty[$, ou $]-\infty, m[$ et $[m, +\infty[$, ou ...
- $A = \mathbb{Q}_-^*$ et $B = \left\{ \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ sont adjacentes.

Le résultat suivant est fondamental pour la suite.

Proposition 5. *Soit A, B deux parties adjacentes de $\mathbb{R}$. Alors $\sup A$ et $\inf B$ existent et sont égaux.*

4.3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Théorème 3. *Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.*
Alors il existe un unique réel I tel que

- *pour toute fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\phi \leqslant f$, on ait $\displaystyle\int_{[a,b]} \phi \leqslant I$;*
- *pour toute fonction ψ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\psi \geqslant f$, on ait $\displaystyle\int_{[a,b]} \psi \geqslant I$.*

Ce réel est appelé intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$. Cette intégrale est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On termine par un résultat technique très utile pour les démonstrations qui suivent.

Proposition 6. *Soit (f_n) une suite de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f continue par morceaux sur $[a, b]$.*

Alors la suite $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} f_n \right)$ converge vers $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

5 Propriétés générales de l'intégrale

5.1 Linéarité, positivité et croissance

Proposition 7 (Linéarité de l'intégrale)**.** *Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, α et β deux réels.*

Alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g.$

Proposition 8 (Positivité de l'intégrale)**.** *Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.*

Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,dx \geqslant 0$.

Proposition 9 (Croissance de l'intégrale)**.** *Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$.*

Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,dx \leqslant \int_{[a,b]} f(x)\,dx$.

Exercices :

3) On pose $a = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $f : t \mapsto \sqrt{\sin(t^2)}$ pour $t \in [0, a]$.

   Donnez l'allure de la courbe de f et donnez un encadrement de $\displaystyle\int_{[0,a]} f$ à $0,1$ près en supposant connue une valeur approchée de a : $1,25$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{[0,1]} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.
   - Justifiez que la suite (I_n) est bien définie et qu'elle est positive.
   - Étudiez la monotonie de la suite (I_n). Déduisez-en qu'elle est convergente.
   - Majorez I_n par une suite explicite de manière à trouver sa limite quand $n \to +\infty$.

Corollaire 1 (Inégalité triangulaire)**.** *Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.*
Alors $\left|\int_{[a,b]} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f(x)|\ dx.$

Exercices :

5) Soit $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que $|f'|$ est majorée par $M \geqslant 0$. On note $\alpha = f(0)$ et on suppose que $\alpha \geqslant 0$. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \alpha\, x + M\,\frac{x^2}{2}$.

5.2 Relation de Chasles

Proposition 10. *Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $c \in [a,b]$.*
Alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

5.3 Stricte positivité de l'intégrale

Proposition 11. *Si f est continue sur $[a,b]$, positive sur $[a,b]$ et strictement positive en au moins un point, alors* $\int_{[a,b]} f > 0.$

On en déduit le résultat suivant par contraposition.

Proposition 12. *Soit f une fonction définie sur le segment $[a,b]$. On suppose que*
- *f est continue sur $[a,b]$;*
- *f est de signe constant sur $[a,b]$;*
- *l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ est nulle.*

Alors f est identiquement nulle sur le segment $[a,b]$.

Remarque. Attention ! Ce résultat est faux si on remplace l'hypothèse de continuité par une hypothèse de continuité par morceaux.

Exercices :

6) Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\int_1^2 (x-1)\left(P(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 0$.
Montrer que P est le polynôme nul.

Corollaire 2. *Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et $f > 0$ sur $[a,b]$, alors* $\int_{[a,b]} f > 0.$

5.4 Généralisation de la notation

On abandonne vite la notation $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x$, un peu lourde, au profit de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. À ce stade, les bornes a et b doivent toujours être « dans le bon sens » : on doit avoir $a < b$. En pratique, on s'autorise aussi les cas où $a = b$ et $a > b$ en adoptant les conventions suivantes :

Définition. Soit I un intervalle, f une fonction continue par morceaux sur I, a et b deux éléments quelconques de I.

On définit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par $\begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[a,b]} f & \text{si } a > b \end{cases}$

Ainsi, intervertir les bornes d'une intégrale la transforme en son opposé.

Les propriétés générales de l'intégrale restent-elles valables ?

- Les propriétés qui ne font pas intervenir d'inégalités sont préservées sans prêter attention à l'ordre des bornes : pas de problème pour la linéarité, pour la relation de Chasles et pour les fonctions continues de signe constant et d'intégrale nulle.
- En revanche, les propriétés avec inégalités ne fonctionnent que si les bornes sont dans le sens croissant : c'est le cas de la positivité, de la croissance et de l'inégalité triangulaire. Pour les appliquer, il faudra toujours justifier que les bornes sont dans le bon sens.

Exercices :

7) Soit x un réel. On pose $F(x) = \int_x^{x^2} \ln(1+t^3)\,dt$.
   - Déterminez le domaine de définition de F.
   - En utilisant que $\forall u > -1$, $\frac{u}{1+u} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$, encadrez $F(x)$ quand $x \in \mathbb{R}_+$.

5.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'intégrale d'un produit n'est pas égale en général au produit des intégrales. On se contente d'une inégalité classique.

Proposition 13. *Soit f, g deux fonction continues par morceaux sur $[a,b]$ $(a<b)$.*

Alors $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$.

De plus, si on suppose que f et g sont continues, alors il y a égalité si et seulement si f et g sont colinéaires.

6 Lien entre calcul intégral et calcul différentiel

6.1 Primitives

D'abord quelques rappels.

Définition. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Des résultats sur les dérivées se déduit le résultat élémentaire suivant.

Proposition 14. *Si F et G sont deux primitives de f sur un* ***intervalle*** *I, alors il existe une constante k telle que $G = F + k$ sur I.*

6.2 Théorème fondamental de l'analyse

D'abord un petit résultat, appelé égalité de la moyenne :

Proposition 15. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b deux points de I.*

Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f = (b-a)f(c)$.

À l'aide de ce résultat, on peut facilement prouver le théorème qui relie le calcul intégral et le calcul différentiel.

Théorème 4 (Théorème fondamental de l'analyse)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a un point de I. On pose $\Phi\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

Alors Φ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque. On a donc montré que si f est une fonction continue sur I, alors la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f$ est de classe C^1 sur I, car pour tout $x \in I$, $\Phi'(x) = f(x)$. **Et non pas $\Phi'(x) = f(x) - f(a)$! ! ! !**

Corollaire 3. *Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.*

Remarque. Ce résultat n'est pas effectif : il ne permet pas de calculer explicitement une primitive d'une fonction quelconque. Pire que ça : il existe des fonctions simples, construites à l'aide des fonctions usuelles, dont aucune primitive ne peut s'exprimer à l'aide de ces mêmes fonctions.

Par exemple, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, très utile en calcul de probabilité, n'a aucune primitive simplement exprimable.

6.3 Application aux calculs d'intégrales

Théorème 5. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive quelconque de f sur I.*
Alors pour tout $(a,b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

On déduit de ce résultat le corollaire suivant, dans lequel les variations d'une fonction sont vues comme intégrale de sa dérivée.

Corollaire 4. *Soit f une fonction **de classe** C^1 sur un intervalle I, a et b deux points de I.*
Alors $\displaystyle f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$.

Remarque. Dans notre cadre d'étude, f est de classe C^1 sur I pour que f' existe et soit continue, condition suffisante pour pouvoir l'intégrer.

6.4 Intégration par parties

Proposition 16. *Soit u, v deux fonction de classe C^1 sur $[a,b]$.*
Alors $\displaystyle\int_a^b u\,v' = \Big[u\,v\Big]_a^b - \int_a^b u'\,v$.

6.5 Changement de variable dans une intégrale

Proposition 17. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, φ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $\varphi([a,b]) \subset I$.*
Alors $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

7 Formules de Taylor

7.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 6. *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I, a et b deux points de I. Alors :*

$$f(b) \;=\; f(a) + f'(a)\,(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(b-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(b-t)^n\,dt.$$

Remarque. Avantage : formule très précise qui donne une expression exacte du reste sous forme d'une intégrale.

Inconvénient : lourd à manier. On écrira en général cette intégrale dans le but de majorer l'intégrale. C'est l'objet du résultat qui suit.

7.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 18. *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I, a et b deux points de I. Alors :*

$$\left| f(b) - f(a) - f'(a)\,(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}\,(b-a)^2 - \cdots\cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|$$

8 Intégrale de fonctions à valeurs complexes

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On écrit $f = u + i\,v$ où u et v sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ quand u et v le sont aussi.

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\mathrm{d}x + i\int_a^b v(x)\mathrm{d}x$.

On vérifie alors que cette intégrale de fonctions à valeurs complexes a les mêmes propriétés que l'intégrale des fonctions réelles : linéarité (avec des coefficients complexes), relation de Chasles. En revanche, les propriétés qui font intervenir la relation d'ordre $\leqslant$ ne sont évidemment plus valables.

Les idées développées ci-dessus dans le cadre du calcul pratique sont encore valables : linéarisation, intégration par parties, changement de variables. Si on connaît une primitive de la fonction à intégrer, alors le calcul se fait directement : **le seul piège à éviter est de ne pas faire intervenir de logarithme de nombre complexe** !

Exemples.

— calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-i)^2}\mathrm{d}x$.

— calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-i}\mathrm{d}x$.

9 Calcul approchée d'intégrales

9.1 Sommes de Riemann - méthode des rectangles

Théorème 7 (Sommes de Riemann)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les sommes de Riemann associées à la fonction f sur $[a,b]$:*

pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $c_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k), \qquad S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k), \qquad S''_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(c_k)$$

Alors les suites (S_n), (S'_n) et (S''_n) tendent toutes les trois vers $\displaystyle\int_{[a,b)} f(x)\,dx$.

Exemples.

— Calcul des intégrales de fonctions affines : $\displaystyle\int_{[0,1]} x\,\mathrm{d}x$, plus généralement $\displaystyle\int_{[a,b]} (\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x$.

— Calcul de $\displaystyle\int_{[0,1]} x^2\,\mathrm{d}x$.

— Calcul de $\displaystyle\int_{[0,1]} e^x\,\mathrm{d}x$.

Ce théorème permet de calculer certaines limites de sommes dont le terme général dépend à la fois de l'indice de sommation k et la borne n de la somme. Toute la difficulté consiste à remettre cette somme sous la bonne forme.

— Par un changement d'indice, se ramener à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}$.

— Faire apparaître un facteur $\frac{1}{n}$ devant la somme

— Dans le terme sommé, faire apparaître $\frac{k}{n}$.

— Introduire la fonction f en remplaçant $\frac{k}{n}$ par x et poser $a = 0$, $b = 1$

— Justifier que f est continue sur $[0, 1]$ et conclure à l'aide du théorème.

Exercices :

8) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

— $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$;

— $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^3}$;

— $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^3 + 2kn^2 + 3k^2 n}{n^4} \arctan(\frac{k}{n})$.

Remarque. Le résultat précédent sur les sommes de Riemann reste valable avec f seulement continue par morceaux.

Dans le cas où la fonction est lipschitzienne, on peut connaître la précision de l'approximation.

Proposition 19. *Soit f une fonction lipschitzienne sur $[a, b]$.*

Alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S_n - \int_a^b f \right| \leqslant \frac{K}{n}$.

On dit que la méthode des rectangles est une méthode d'approximation d'ordre 1.

Conséquence : les sommes de Riemann convergent lentement vers l'intégrale.

9.2 Méthode des trapèzes

On remplace les rectangles par des trapèzes, c'est-à-dire que dans les sommes de Riemann, on remplace les termes $f(c_k)$ par $\frac{f(c_k) + f(c_{k+1})}{2}$: on pose $T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(c_k) + f(c_{k+1})}{2}$.

En général, l'approximation est meilleure.

Proposition 20. *Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$.*

Alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| T_n - \int_a^b f \right| \leqslant \frac{K}{n^2}$.

La méthode des trapèzes est donc une méthode d'approximation d'ordre 2.

Remarque. On peut encore améliorer la rapidité de convergence en remplaçant l'arête supérieure des trapèzes par des courbes plus compliquées : des arcs de parabole (méthode d'ordre 3), etc.