Problème 1 - étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln t}\,\mathrm{d}t$

Question 1)

a) Rappelez comment démontrer l'inégalité « pour tout $t > 0$, $\ln t \leqslant t-1$ » sans faire d'étude de la fonction $t \mapsto t-1-\ln t$ (ou autre).

b) Montrez que f est définie sur $]0, +\infty[$.

Question 2) Montrez que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, calculez sa dérivée et précisez ses variations.

Question 3) Donnez un encadrement très simple de $f(x)$ (en utilisant la question 1) qui permet de prolonger f par continuité en 0.

Question 4) f ainsi prolongée est-elle de classe C^1 sur $[0, +\infty[$?

Question 5)

a) Comparez les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t - \ln t}$ sur $[1, +\infty[$.

b) Montrez que pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant \ln 2$.

Question 6)

a) Déterminez un réel $x_0 > 0$ tel que pour tout $t > x_0$, $\dfrac{1}{t - \ln t} \leqslant \dfrac{1}{t - 2\sqrt{t}}$ (on fera attention aux signes...)

b) Calculez (pour $x > x_0$) $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t - 2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrez que pour $x \in [x_0, +\infty[$, on a l'encadrement

$$\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x} - 2}\right)$$

d) Déterminez la limite de f en $+\infty$.

Question 7) Donnez l'allure de la courbe de f.

Problème 1

Question 1)

a) La fonction ln est concave (puisque sa dérivée seconde $t \mapsto \dfrac{-1}{t^2}$ est négative) sur $]0,+\infty[$ donc sa courbe est située sous ses tangentes. Or la tangente en 1 a pour équation $y = t-1$, donc pour tout $t>0$, $\ln t \leqslant t-1$.

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, le segment $[x,2x]$ est inclus dans $]0,+\infty[$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-\ln t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (car c'est l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur cet intervalle d'après la question précédente) donc son intégrale entre x et $2x$ existe.

Question 2) La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{t-\ln t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc elle possède une primitive H sur cet intervalle et on peut écrire : pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = H(2x) - H(x)$.

On voit alors clairement que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (h. de composition et d'opérations sur les fonctions dérivables) et que pour tout $x>0$ $f'(x) = 2h(2x) - h(x) = \dfrac{2}{2x-\ln(2x)} - \dfrac{1}{x-\ln x} = \dfrac{\ln(2x) - 2\ln x}{(2x-\ln(2x))(x-\ln x)}$.

Pour tout $x>0$, on a $x - \ln x \geqslant 1 > 0$ donc aussi $2x - \ln(2x) \geqslant 1 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln(2x) - 2\ln x = \ln 2 - \ln x$.

Donc f est croissante sur $]0,\ln 2]$ et décroissante sur $[\ln 2,+\infty[$.

Question 3) Pour tout $x>0$ et pour tout $t \in [x,2x]$, $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$, donc les bornes étant dans le bon sens ; on en déduit que $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t = x$.

D'après le th. d'encadrement, il vient que f a pour limite 0 en 0 : on prolonge donc f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Question 4) f est continue sur $[0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et il est évident que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, donc d'après le th. de limite de la dérivée (ou de prolongement C^1), f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

Question 5)

a) Pour tout $t \geqslant 1$, $0 < t - \ln t \leqslant t$ donc $\dfrac{1}{t} \leqslant h(t)$.

b) Pour tout $x \geqslant 1$, pour tout $t \in [x,2x]$, on a $t \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{t} \leqslant h(t)$, puis comme les bornes sont dans le bon sens, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x)$, ce qui donne $\ln 2 \leqslant f(x)$.

Question 6)

a) D'abord on travaille avec $t>4$ pour que $t - 2\sqrt{t}$ soit strictement positif. Une fois cette condition posée, on peut alors étudier $t \mapsto 2\sqrt{t} - \ln t$ et vérifier que cette fonction est positive sur $[4,+\infty[$. $x_0 = 4$ convient.

b) Changement de variable $t = u^2$: $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t-2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \frac{2u}{u^2-2u}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \frac{2}{u-2}\,\mathrm{d}u = 2\ln\frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x}-2}$.

c) On a déjà montré que $\ln 2 \leqslant f(x)$ et l'autre inégalité découle des deux questions précédentes.

d) Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x}-2} \sim \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$ donc $\dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x}-2}$ tend vers $\sqrt{2}$, donc par composition des limites, $2\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x}-2}\right)$ tend vers $2\ln\sqrt{2} = \ln 2$.

D'après le th. d'encadrement, f a pour limite $\ln 2$ en $+\infty$.

Question 7)