Problème 1 - Intégrales de Wallis (1616-1703)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$.

Partie 1 - Etude de la suite (u_n)

Question 1)

a) Montrez que la suite (u_n) est convergente et à termes strictement positifs.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

Question 2) Soit α un réel appartenant à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (pour l'instant quelconque, mais qu'on choisira judicieusement plus tard...)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}(\cos\alpha)^n + \alpha$

b) Montrez que si on pose $\alpha = \dfrac{1}{n^a}$ et si on choisit bien la valeur de $a > 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\cos\alpha)^n = 0$

c) Concluez : quelle est la limite de (u_n) ?

Question 3)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ (on pourra intégrer par parties)

b) Déduisez-en une expression de u_{2n} en fonction de $(2n)!$, $(n!)^2$ et une puissance de 2.

Question 4) En utilisant la monotonie de la suite (u_n), montrez que $u_n \sim u_{n+1}$ (quand n tend vers l'infini).

Question 5)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Déduisez-en un équivalent simple de u_n et retrouvez en particulier la limite de (u_n).

Partie 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. Soit $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+\sin t}$ définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Question 1)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)dt + (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t} dt$

b) Déduisez-en que (s_n) converge vers $\ell = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)dt$.

Question 2) En effectuant un changement de variable affine $u = ct + d$ (c, d à choisir vous-même), montrez que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(u)} du$. Déduisez-en la valeur de ℓ.

Problème 1

Partie 1

Question 1)

a) La fonction $t \mapsto (\sin t)^n$ est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et prend au moins une valeur strictement positive, donc d'aprés le th. de stricte positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ donc $(\sin t)^{n+1} \leqslant (\sin t)^n$ donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} dt \leqslant \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$.

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, d'aprés le th. de la limite monotone, (u_n) converge.

b) Changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$: le changement de variable est bien de classe C^1 et la fonction $t \mapsto (\sin t)^n$ est bien continue.

Question 2)

a) $0 \leqslant u_n$ a été montré dans la question précédente. $u_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\cos t)^n dt + \int_{\alpha}^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

Sur $[0, \alpha]$, $\cos^n \leqslant 1$ donc $\displaystyle\int_0^{\alpha} (\cos t)^n dt \leqslant \int_0^{\alpha} 1 \, dt = \alpha$.

Sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^n \leqslant \cos^n \alpha$ donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \leqslant \int_{\alpha}^{\pi/2} (\cos \alpha)^n dt = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) (\cos \alpha)^n \leqslant \frac{\pi}{2} (\cos \alpha)^n$.

En additionnant les deux inégalités, on obtient ce qu'on veut.

b) En notant $a = 1/4$, on a bien $\alpha = \frac{1}{n^a}$ qui tend vers 0 car $a > 0$.

Dans ce cas, $(\cos \alpha)^n = \exp(n \ln \cos(n^{-a}))$, donc on veut montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \ln \cos(n^{-a}) = -\infty$.

$\ln \cos(n^{-a}) = \ln(1 + u)$ où $u = \cos(n^{-a}) - 1$ tend vers 0. Donc $\ln \cos(n^{-a}) \sim \cos(n^{-a}) - 1 \sim -\frac{n^{-2a}}{2}$ donc $n \ln \cos(n^{-a}) \sim -\frac{n^{1-2a}}{2}$. Ceci tend vers $-\infty$ car $1 - 2a = \frac{1}{2} > 0$.

On a donc montré ce qu'on voulait.

c) Avec ce choix de α, d'aprés le th. d'encadrement et l'encadrement du a), on en déduit que (u_n) converge vers 0.

Question 3)

a) $u_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2} dt = \int_0^{\pi/2} u(t) v'(t) dt$ en posant $u(t) = (\sin t)^{n+1}$ et $v(t) = -\cos t$. u, v sont de classe C^1, donc on peut faire une intégration par parties.

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2} dt = [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t) dt$. On obtient alors $u_{n+2} = (n+1) \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \cos^2 t dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n (1 - \sin^2 t) dt$, puis en développant on a $u_{n+2} = (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}$, ce qu'on voulait.

b) D'aprés la relation précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2n-2}$, donc $u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} u_{2n-4}$, puis plus généralement,

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times ... \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} u_0$$

(pour faire bien propre, une récurrence s'impose, je vous la laisse).

Le numérateur est presque $(2n)!$, il manque les facteurs $(2n), (2n-2), ..., 2,$: on force leur apparition en les faisant apparaître aussi au dénominateur, on obtient donc

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{((2n)(2n-2)...2)^2} u_0$$

Puis en mettant 2 en facteur dans chacun des facteurs du dénominateur, il vient

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u_0 = \frac{\pi (2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

Question 4) (u_n) est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, et comme (u_n) est à termes strictement positifs d'aprés 1), on a $\dfrac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. D'aprés une relation précédente, on en déduit que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. D'aprés le th. d'encadrement, $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ donc $u_{n+1} \sim u_n$.

Question 5)

a) Par récurrence en utilisant la relation $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ et $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $u_{n+1} \sim u_n$ donc $(n+1)u_{n+1}u_n \sim n(u_n)^2$ donc $\dfrac{\pi}{2} \sim n(u_n)^2$. On en déduit que $(u_n)^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et comme (u_n) est à termes strictement positifs, on a $u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie 2

Question 1)

a) Par linéarité de l'intégrale, $s_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\sin t)^k dt$. Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $(-\sin t) \neq 1$ donc la somme des premiers termes de la suite géométrique $\left((-\sin t)^k\right)$ vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\sin t)^k &= \frac{1-(-\sin t)^{n+1}}{1-(-\sin t)} \\
&= \frac{1-(-\sin t)^{n+1}}{1+\sin t} \\
&= \varphi(t) + (-1)^{n+2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}
\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu par linéarité de l'intégrale.

b)

$$\begin{aligned}
\left| (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t} dt \right| &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t} dt \\
&\leqslant \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} dt \\
&= u_{n+1}
\end{aligned}$$

car pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t} \leqslant (\sin t)^{n+1}$.

u_{n+1} tend vers 0 donc d'aprés le th. d'encadrement, on a ce qu'on veut.

Question 2) On pose $u = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{t}{2}$. Alors $t = \dfrac{\pi}{2} - 2u$ donc $1 + \sin t = 1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = 1 + \cos(2u) = 2\cos^2 u$, et $dt = -2du$, d'où le résultat voulu par changement de variable (hypothèses clairement vérifiées).

On peut calculer la nouvelle intégrale, car une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 u}$ est la fonction tan. Donc $\lim s_n = [\tan u]_0^{\pi/4} = 1$.