

Problème 1

Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle racines carrées de f tous les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u^2 = f$.

Ce problème va montrer que tout est possible : on peut trouver des endomorphismes qui n'ont pas de racine carrée, d'autres qui en ont un nombre fini et d'autres qui peuvent en avoir une infinité.

Dans la première partie, lorsqu'on vous demande de choisir des vecteurs, vous donnerez toujours des vecteurs dont la première coordonnée est 1 et à coordonnées entières.
Même si la calculatrice est autorisée, les calculs sur les matrices doivent être explicites ! Les résultats donnés sans trace des calculs effectués ne seront pas validés.

Dans ce problème, E est un \mathbb{R} -e.v. de dimension 3, \mathcal{B} une base de E .

Partie 1 - Exemple : une infinité de racines carrées

On pose f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base \mathcal{B} :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 7 & 3 \\ -11 & 8 & 3 \\ -11 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Question 1) Sans résoudre de systèmes d'équations, justifiez que f n'est pas un automorphisme de E et donnez la dimension de son noyau.

Question 2) Donnez une base de $\text{Ker } f$ qui respecte la condition encadrée ci-dessus.

Question 3)

- a) Justifiez que $\text{Im } f$ est un plan vectoriel et donnez une base (v_2, v_3) de $\text{Im } f$ qui respecte la condition encadrée.
- b) Justifiez que $\text{Im } f$ possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz = 0$ dans la base \mathcal{B} (en notant x, y, z les coordonnées génériques dans la base \mathcal{B}). Donnez des valeurs de a, b, c convenables.

Question 4) On appelle \mathcal{C} la famille obtenue en réunissant les deux bases précédentes (en mettant en premier les vecteurs de la base de $\text{Ker } f$, suivis des vecteurs de la base de $\text{Im } f$).

- a) Justifiez que \mathcal{C} est une base de E .
- b) Calculez $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_2 et v_3 , puis donnez la matrice D de f dans cette base.

Question 5) Maintenant que vous connaissez D , f n'est-il pas un endomorphisme remarquable ? Possède-t-il au moins une racine carrée ?

Dans les deux questions suivantes, on suppose que u est une racine carrée de f .

Question 6)

- a) Montrez que $\text{Ker } u \subset \text{Ker } f$. Qu'en déduisez-vous à propos de la dimension de $\text{Ker } u$?
- b) L'endomorphisme u peut-il être un automorphisme ? Qu'en déduisez-vous à propos de la dimension de $\text{Ker } u$?
- c) Déduisez-en que $\text{Ker } u = \text{Ker } f$.

Question 7)

- a) Montrez que $u(v_2)$ et $u(v_3)$ sont invariants par f .
- b) Montrez que la matrice de u dans la base \mathcal{C} est de la forme $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont quatre réels.
- c) On impose $a = d = 0$. Donnez alors une condition nécessaire et suffisante sur b et c pour que u soit effectivement une racine carrée de f et justifiez ainsi que f possède une infinité de racines carrées.

Partie 2 - Exemple : un nombre fini de racines carrées

Maintenant, g est l'endomorphisme de E de matrice B dans la base \mathcal{B} :

$$B = \begin{pmatrix} -13 & 9 & 4 \\ -8 & 6 & 2 \\ -29 & 19 & 10 \end{pmatrix}$$

Question 1)

- Justifiez que l'ensemble E_1 des vecteurs invariants par g est la droite vectorielle $\text{vect}(v_2)$ en résolvant un système linéaire.
- Déterminez l'ensemble E_2 des vecteurs v de E tels que $g(v) = 2v$ et vérifiez que l'on obtient un s.e.v. de E dont vous préciserez une base.

Question 2) Vérifiez que la matrice de g dans la base \mathcal{C} est diagonale, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$ où les points d'interrogation symbolisent 3 réels que vous calculerez.

Question 3) Quel est le rang de g ? Montrez que f et g ont même noyau et même image.

Question 4) On pose $h = g + \text{Id}_E$.

- Montrez que h est un automorphisme de E .
- Montrez que h^3 est combinaison linéaire de h^2 , h et Id_E .
- Donnez alors une expression de h^{-1} en fonction de h^2 , h et Id_E .

Question 5) Soit u une racine carrée de g .

- Justifiez brièvement que $\text{Ker } u = \text{Ker } g$.
- Montrez que $u(v_2) \in E_1$ et $u(v_3) \in E_2$.

Déduisez-en que la matrice de u dans la base \mathcal{C} est de la forme $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ où a, d sont deux réels.

- Montrez que g possède exactement 4 racines carrées.

Partie 3 - Exemple : aucune racine carrée

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. On pose $k = f - \lambda g$.

Question 1) Donnez la matrice de k dans la base \mathcal{C} et justifiez que mis à part pour deux valeurs de λ que vous préciserez, k et f ont même noyau et même image.

Question 2) Montrez qu'il existe au moins une valeur de λ telle que k n'ait aucune racine carrée.

En conclusion, on peut donc constater que toutes les situations sont possibles : un endomorphisme peut n'avoir aucune racine carrée, un nombre fini de racines carrées ou une infinité.

Problème 2

Dans ce problème, n est un entier naturel strictement positif fixé, $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour $P \in E$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement ΔP sans parenthèses. La notation $\Delta^2 P$ désigne donc $\Delta \circ \Delta(P)$ en abrégé.

Question 1) Montrez que Δ est un endomorphisme de E . Est-il injectif ?

Question 2)

- a) Soit $P \in \text{Ker } \Delta$ tel que P possède une racine (complexe) a : montrez que P est en fait le polynôme nul.
- b) Déterminez $\text{Ker } \Delta$.
- c) Déterminez le rang de Δ .

Question 3) Montrez que $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Question 4) Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $G_i = \prod_{k=0}^{i-1} (X - k)$ (et donc en particulier $G_0 = 1$, le produit étant vide).

- a) Montrez que la famille $\mathcal{G} = (G_0, \dots, G_n)$ est une base de E .
- b) Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculez ΔG_i en fonction des vecteurs G_0, \dots, G_n .
- c) Donnez la matrice de Δ dans la base \mathcal{G} .

Question 5) Montrez que Δ est un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $\Delta^p = 0$. Quel est le plus petit entier p vérifiant cette propriété ?

Question 6) On pose $E_0 = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$.

- a) Justifiez que E_0 est un hyperplan de E .
- b) On appelle Γ la restriction de Δ à E_0 : montrez que Γ est un isomorphisme de E_0 dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- c) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P = \Gamma^{-1}(Q)$. Montrez que pour tout entier naturel N , $\sum_{k=0}^N Q(k) = P(N+1)$.

Question 7) On veut montrer par récurrence sur m la formule de Grégory : si P est un polynôme de E de degré inférieur ou égal à m , alors

$$P = \sum_{k=0}^m \frac{(\Delta^k P)(0)}{k!} G_k$$

- a) Montrez que cette égalité est vraie pour $m = 0$.
- b) On suppose que la proposition est vraie au rang $m - 1$. Soit P de degré au plus m , que dire du degré de ΔP ?
Montrez que $P - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} G_{k+1}$ est un polynôme constant, puis concluez.

Question 8) Soit $P \in E$.

- a) Calculez $\Delta^2 P$, $\Delta^3 P$ (éventuellement $\Delta^4 P$) en fonction de P et émettez une conjecture à propos de $\Delta^m P$ où m désigne un entier naturel.
- b) Démontrez cette conjecture.
- c) Montrez que $\Delta^k P(0)$ se calcule à l'aide des valeurs $P(0), \dots, P(k)$ et des coefficients du binôme.

Question 9) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donnez une expression explicite de $\Gamma^{-1}(Q)$ en fonction de Q .

Question 10) Exemple : dans cette question, on prend $n = 5$ et $Q = X^4$. Pour $N \in \mathbb{N}$, donnez une expression explicite de $\sum_{k=0}^N k^4$ en fonction de N .

Problème 1

Partie 1

Question 1) On calcule $\text{rg } f : \text{rg } f = 2 \neq \dim E$, donc f n'est pas un automorphisme de E . D'après le th. du rang, $\dim E = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f$ donc $\dim \text{Ker } f = 1$.

Question 2) Soit $v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. On a l'équivalence $v \in \text{Ker } f \iff f(v) = 0$, ce qui se traduit par la nullité des coordonnées de $f(v)$ dans la base \mathcal{B} .

D'après le cours, on sait calculer ces coordonnées : on trouve donc le système $\begin{cases} -10x + 7y + 3z = 0 \\ -11x + 8y + 3z = 0 \\ -11x + 7y + 4z = 0 \end{cases}$ qu'on résout.

$$\begin{cases} -10x + 7y + 3z = 0 \\ -11x + 8y + 3z = 0 \\ -11x + 7y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -11x + 8y + 3z = 0 \\ -11x + 7y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \iff v \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On pose v_1 le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Le noyau de f est donc la droite vectorielle dirigée par v_1 .

Question 3)

- a) On sait que $\text{Im } f$ est un plan vectoriel puisque $\text{rg } f = 2$: une base de ce plan est donc constituée de deux vecteurs non colinéaires dans l'image de f .

Or si on note (e_1, e_2, e_3) les vecteurs de la base \mathcal{B} , on sait que $f(e_1) \begin{pmatrix} -10 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $f(e_2) \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$: ces deux vecteurs sont dans $\text{Im } f$ et ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $\text{Im } f$. Comme ils ne sont pas de première coordonnée égale à 1, on s'arrange par combinaison linéaire pour obtenir cette propriété.

On pose $v_2 = 2f(e_1) + 3f(e_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $v_3 = -5f(e_1) - 7f(e_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$: ces deux vecteurs sont dans $\text{Im } f$ et ne sont pas colinéaires, donc ils forment aussi une base de $\text{Im } f$.

- b) En dimension 3, le plan $\text{Im } f$ est un hyperplan, donc il possède une équation du type $ax + by + cz = 0$ où a, b, c sont trois réels à déterminer.

Pour trouver a, b, c , il suffit de les choisir pour que les coordonnées des deux vecteurs de la base précédente les satisfassent, ce qui donne un système linéaire à deux équations et trois inconnues a, b, c . Par exemple, $-11x + 7y + 3z = 0$ est une équation de $\text{Im } f$.

Question 4)

- a) Le vecteur v_1 ne vérifie pas l'équation du plan $\text{Im } f$ donc il n'appartient pas à $\text{Im } f$. Or $\text{Im } f$ est un hyperplan de E donc d'après le cours, la droite vectorielle $\text{vect}(v_1)$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

On peut bien sûr le faire « à la main » en calculant le rang de la famille \mathcal{C} , qui vaut 3, et en remarquant qu'elle a 3 vecteurs dans E , espace de dimension 3, donc qu'elle est une base.

- b) Un petit calcul rapide montre que $f(v_2) = v_2$ et $f(v_3) = v_3$!

On en déduit la matrice D (comme diagonale!) :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 5) Les vecteurs de $\text{Im } f$ sont invariants par f . . . hmmm . . . Mais bien sûr ! On connaît un type d'endomorphisme qui vérifie ça : les projecteurs. Alors on vérifie que f en est bien un.

On calcule sans peine $D^2 = D$. Donc $f^2 = f$, autrement dit f est un projecteur. Et comme $f^2 = f$, f possède au moins une racine carrée : lui-même !

Question 6)

- a) Soit $x \in \text{Ker } u$. Alors $u(x) = 0$ donc $f(x) = u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$, donc $x \in \text{Ker } f$.
Ainsi on a bien montré l'inclusion $\text{Ker } u \subset \text{Ker } f$.
Donc $\dim \text{Ker } u \leq \dim \text{Ker } f = 1$
- b) Si u est un automorphisme de E , alors comme l'ensemble des automorphismes de E est un groupe pour la loi \circ , on en déduit que $u^2 = u \circ u$ est un automorphisme, autrement dit f est un automorphisme de E : contradiction.
Donc u n'est pas un automorphisme de E . Donc u n'est injectif d'après le cours (pour un endomorphisme en dimension finie, il y a équivalence entre u automorphisme et u injectif).
Donc $\text{Ker } u$ n'est pas réduit à $\{0\}$, autrement dit $\dim \text{Ker } u \geq 1$.
- c) D'après les résultats précédents, on a $1 \leq \dim \text{Ker } u \leq 1$ donc $\dim \text{Ker } u = 1 = \dim \text{Ker } f$.
Or il y a une relation d'inclusion entre les deux s.e.v. : $\text{Ker } u \subset \text{Ker } f$ et ils ont la même dimension donc ces deux s.e.v. sont égaux : $\text{Ker } u = \text{Ker } f$.

Question 7)

- a) $f(u(v_2)) = u^2 \circ u(v_2) = u^3(v_2) = u \circ u^2(v_2) = u(f(v_2))$, or $f(v_2) = v_2$, donc $f(u(v_2)) = u(v_2)$. Et de même avec v_3 .
- b) D'après ce qui précède, $u(v_2)$ et $u(v_3)$ sont invariants par f donc ils appartiennent à $\text{Im } f = \text{vect}(v_2, v_3)$. Donc ils ne s'écrivent que comme combinaisons linéaire de v_2 et v_3 : il existe 4 réels a, b, c, d tels que $u(v_2) = av_2 + bv_3$ et $u(v_3) = cv_2 + dv_3$.
De plus, $u(v_1) = 0$ puisque $\text{Ker } u = \text{Ker } f$.

La matrice de u dans la base \mathcal{C} est donc de la forme $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$

- c) Si on suppose en plus que $a = d = 0$, alors comme $u^2 = f$, on en déduit que $U^2 = D$: après calculs très simples, on constate que cela revient à la condition $bc = 1$.

Donc tous les endomorphismes u dont la matrice U dans la base \mathcal{C} est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ où b est un réel

non nul quelconque sont candidats-solutions

Il est facile de constater qu'ils conviennent puisque $U^2 = D$ et donc $u^2 = f$.

Partie 2

Question 1)

- a) On pose $v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. On a l'équivalence $g(v) = v \iff \begin{cases} -13x + 9y + 4z = x \\ -8x + 6y + 2z = y \\ -29x + 19y + 10z = z \end{cases}$ et on résout ce système.

$$\begin{cases} -13x + 9y + 4z = x \\ -8x + 6y + 2z = y \\ -29x + 19y + 10z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -14x + 9y + 4z = 0 \\ -8x + 5y + 2z = 0 \\ -29x + 19y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -8x + 5y + 2z = 0 \\ -29x + 19y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 9x + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -x \end{cases} \iff v \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On constate que $g(v) = v$ si et s.si v est un multiple de v_2 : l'ensemble E_1 est donc la droite vectorielle $\text{vect}(v_2)$.

- b) On pose $v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. On a l'équivalence $g(v) = 2v \iff \begin{cases} -13x + 9y + 4z = 2x \\ -8x + 6y + 2z = 2y \\ -29x + 19y + 10z = 2z \end{cases}$ et on résout ce système.

$$\begin{cases} -13x + 9y + 4z = 2x \\ -8x + 6y + 2z = 2y \\ -29x + 19y + 10z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -15x + 9y + 4z = 0 \\ -8x + 4y + 2z = 0 \\ -29x + 19y + 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -8x + 4y + 2z = 0 \\ -29x + 19y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 12y + 2z = 0 \\ 48y + 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = -6y \end{cases} \iff v \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -6y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On constate que $g(v) = 2v$ si et s.si v est un multiple de v_3 : l'ensemble E_2 est donc la droite vectorielle $\text{vect}(v_3)$.

Question 2) On calcule les coordonnées des vecteurs $g(v_1), g(v_2), g(v_3)$ dans la base \mathcal{B} , on trouve

$$g(v_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad g(v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad g(v_3) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On constate donc immédiatement que $g(v_1) = 0$, $g(v_2) = v_2$ et $g(v_3) = 2v_3$ donc

$$D' = \underset{\mathcal{C}}{\text{mat}} g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 3) Il est alors immédiat en observant la matrice D' que g est de rang 2 et donc d'après le th. du rang, $\dim \text{Ker } g = 1 = \dim \text{Ker } f$.

Mais comme $g(v_1) = 0$, cela prouve que $v_1 \in \text{Ker } g$, donc $\text{Ker } f = \text{vect}(v_1) \subset \text{Ker } g$. On a une inclusion et l'égalité des dimensions donc égalité des deux noyaux.

$v_2 = g(v_2)$ et $v_3 = g\left(\frac{1}{2}v_3\right)$ donc v_2 et v_3 appartiennent à $\text{Im } g$, donc $\text{Im } f = \text{vect}(v_2, v_3) \subset \text{Im } g$. Et de même, avec l'égalité des dimensions, $\text{Im } g = \text{Im } f$.

Question 4)

a) $\underset{\mathcal{C}}{\text{mat}} h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc il est évident que h est de rang 3. Or E est de dimension 3, donc h est un automorphisme de E .

b) On cherche a, b, c trois scalaires tels que $h^3 = ah^2 + bh + c\text{Id}_E$. En travaillant dans la base \mathcal{C} , on obtient les conditions suivantes :
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 9a + 3b + c = 27 \end{cases}$$
, ce qui donne $a = 6$, $b = -11$ et $c = 6$.

c) $h^3 - 6h^2 + 11h = 6\text{Id}_E$ donc $\text{Id}_E = \frac{1}{6}(h^2 - 6h + 11\text{Id}_E) \circ h = h \circ \frac{1}{6}(h^2 - 6h + 11\text{Id}_E)$
donc $h^{-1} = \frac{1}{6}(h^2 - 6h + 11\text{Id}_E)$.

Question 5)

- a) En suivant les mêmes idées que les précédentes, on trouve de même que $\text{Ker } u = \text{Ker } g$ car $\dim \text{Ker } g = 1$.
- b) En procédant comme pour f , on montre facilement que $g(u(v_2)) = u(v_2)$ et $g(u(v_3)) = 2u(v_3)$ donc $u(v_2) \in E_1$ et $u(v_3) \in E_2$.
Or E_1 est la droite vectorielle dirigée par v_2 , donc $u(v_2)$ est colinéaire à v_2 : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(v_2) = av_2$.
De même, E_2 est la droite vectorielle dirigée par v_3 , donc $u(v_3)$ est colinéaire à v_3 : il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $u(v_3) = dv_3$.
De plus, $u(v_1) = 0$ puisque $\text{Ker } u = \text{Ker } f$.

La matrice de u dans la base \mathcal{C} est donc de la forme $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

c) Comme on doit avoir $U^2 = D'$, on en déduit cette fois-ci que $a^2 = 1$, $d^2 = 2$, ce qui donne quatre matrices U possibles :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

donc quatre racines carrées pour g .

Partie 3

Question 1) $\underset{\mathcal{C}}{\text{mat}}(f - \lambda g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\lambda \end{pmatrix}$

Si $1 - \lambda \neq 0$ et $1 - 2\lambda \neq 0$ (donc si $\lambda \notin \{1/2; 1\}$), alors k est de rang 2 et en suivant les mêmes idées que dans la partie précédente, f et k ont même noyau et même image.

Question 2) Si on reprend les idées précédentes, en supposant $\lambda \notin \{1/2; 1\}$, pour que u soit une racine carrée de k , il faut et il suffit que sa matrice dans la base \mathcal{C} soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ avec $a^2 = 1 - \lambda$ et $d^2 = 1 - 2\lambda$, car $1 - \lambda \neq 1 - 2\lambda$.

Si on choisit $\lambda = 2$ par exemple, on aboutit à l'équation $a^2 = -1$ qui n'a pas de solutions réelles, donc dans ce cas, k n'a pas de racine carrée.

Problème 2

Question 1) Soit $(P, Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Delta(P+Q) = (P+Q)(X+1) - (P+Q)(X) = P(X+1) + Q(X+1) - P(X) - Q(X) = \Delta(P) + \Delta(Q)$ et $\Delta(\lambda P) = (\lambda P)(X+1) - (\lambda P)(X) = \lambda P(X+1) - \lambda P(X) = \lambda \Delta(P)$.

Δ est donc une application linéaire. De plus, comme $\deg P(X+1) = \deg P(X)$, on a donc $\deg \Delta(P) \leq \deg P$, donc si $\deg P \leq n$, alors $\deg \Delta P \leq n$.

Au total, Δ est un endomorphisme de E .

Il est non injectif, car $\Delta 1 = 0$, donc $\text{Ker } \Delta$ n'est pas réduit au singleton nul.

Question 2)

a) $P \in \text{Ker } \Delta$ donc $P(X+1) = P(X)$. Comme a est racine de P , on a alors $P(a+1) = P(a) = 0$ donc $a+1$ est encore racine de P .

Par une récurrence évidente, on a alors : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a+k$ est racine de P , donc P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

b) Soit $P \in \text{Ker } \Delta$. Si P a une racine, alors il est nul d'après ce qui précède; si P n'a pas de racine, alors P est constant.

Ceci prouve que $\text{Ker } \Delta \subset \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$.

Mais l'inclusion réciproque est évidente, donc $\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$.

c) D'après le th. du rang, $\dim E = \dim \text{Ker } \Delta + \text{rg } \Delta$. Or $\text{Ker } \Delta$ est une droite vectorielle, donc $\text{rg } \Delta = \dim E - 1 = n$.

Question 3) On remarque aisément que si $\deg P \leq p$, alors $\deg \Delta P \leq p-1$, car les coefficients dominants de $P(X+1)$ et $P(X)$ sont les mêmes, donc ils se simplifient dans ΔP .

Donc $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Or d'après la question précédente, ces deux s.e.v. ont la même dimension n , donc ils sont égaux.

Question 4)

a) \mathcal{G} est une famille de polynômes étagée en degré, donc elle est libre. De plus, elle a $n+1$ vecteurs et $\dim E = n+1$, donc c'est une base de E .

b) Simple calcul : $\Delta G_0 = 0$ et pour $i \geq 1$, $\Delta G_i = i G_{i-1}$.

c) $\text{mat}_{\mathcal{G}} \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Question 5) $\Delta G_k = k G_{k-1}$ donc $\Delta^2 G_k = k(k-1) G_{k-2} \dots$

Par récurrence évidente, on montre que pour tout $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\Delta^p G_k = \frac{k!}{(k-p)!} G_{k-p}$.

En particulier, $\Delta^n G_n = n! G_0$ donc $\Delta^{n+1} G_n = 0$.

Ceci prouve déjà que le plus petit entier p tel que $\Delta^p = 0$ est au moins égal à $n+1$ (s'il existe).

En fait pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Delta^{n+1} G_p = \Delta^{n-p} \Delta^{p+1} G_p = \Delta^{n-p} 0 = 0$.

L'endomorphisme Δ^{n+1} s'annule sur tous les vecteurs d'une base de E , donc il est nul.

On a donc prouvé au total que $\Delta^{n+1} = 0$ et que le plus petit entier p tel que $\Delta^p = 0$ est $n+1$.

Question 6)

a) L'application $P \mapsto P(0)$ est linéaire de E dans \mathbb{R} et n'est pas nulle, donc c'est une forme linéaire non nulle. Son noyau E_0 est donc un hyperplan de E .

b) $G_0 = 1 \notin E_0$ donc d'après le cours, $E = E_0 \oplus \text{vect}(G_0) = E_0 \oplus \text{Ker } \Delta$. Donc Δ induit un isomorphisme de E_0 dans $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (c'est la démonstration du th. du rang, en fait).

c) P est l'unique antécédent de Q tel que $P(0) = 0$. On a donc $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = Q(X)$.

On spécialise en k : $P(k+1) - P(k) = Q(k)$, puis on additionne ces égalités (somme télescopique) :

$$P(N+1) - P(0) = \sum_{k=0}^N Q(k).$$

Question 7)

a) Évident, car $G_0 = 1$ et $\Delta^0 = \text{Id}_E$.

b) Soit P de degré au plus m , le degré de ΔP est au plus $m - 1$ donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\Delta P = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^k \Delta P)(0)}{k!} G_k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{k!} G_k$$

Soit $Q = P - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} G_{k+1}$. On calcule ΔQ .

$$\Delta Q = \Delta P - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} \Delta G_{k+1} = \Delta P - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} (k+1) \Delta G_k = \Delta P - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{k!} \Delta G_k = 0$$

Donc Q est constant, il est donc égal à sa valeur en 0 : $Q = P(0)$.

$$\text{Donc finalement, } P = P(0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} \Delta G_{k+1} = P(0) + \sum_{k=1}^m \frac{(\Delta^k P)(0)}{k!} \Delta G_k = \sum_{k=0}^m \frac{(\Delta^k P)(0)}{k!} \Delta G_k.$$

La proposition est donc vraie au rang m .

Question 8)

a) $\Delta^2 P = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$, $\Delta^3 P = P(X+3) - 3P(X+2) + 3P(X+1) - P(X)$

On reconnaît les coefficients du binôme (surtout que c'est dit en-dessous!).

$$\text{On conjecture : } \Delta^m P = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k).$$

b) Par récurrence. Soit $\mathcal{P}(m)$ la proposition « $\Delta^m P = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k)$ ».

$\mathcal{P}(0)$ est vraie, $\mathcal{P}(1)$ aussi.

Si $\mathcal{P}(m)$ est vraie, alors

$$\begin{aligned} \Delta^{m+1} P &= \Delta \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k) \right) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \Delta(P(X+k)) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} (P(X+k+1) - P(X+k)) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k+1) - \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k) \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} (-1)^{m-j+1} P(X+j) - \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k) \\ &= (-1)^0 \binom{m}{m} P(X+m+1) + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j-1} (-1)^{m-j+1} P(X+j) - \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{m-j} P(X+j) - (-1)^m \binom{m}{0} P(X) \\ &= P(X+m+1) + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j-1} (-1)^{m-j+1} P(X+j) + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{m+1-j} P(X+j) + (-1)^{m+1} P(X) \\ &= P(X+m+1) + \sum_{j=1}^m \left[\binom{m}{j-1} + \binom{m}{j} \right] (-1)^{m-j+1} P(X+j) + (-1)^{m+1} P(X) \\ &= P(X+m+1) + \sum_{j=1}^m \binom{m+1}{j} (-1)^{m-j+1} P(X+j) + (-1)^{m+1} P(X) \\ &= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} (-1)^{m-j+1} P(X+j) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(m)$ est vraie (rem : c'est la même preuve que la formule du binôme).

c) Immédiat : $\Delta^m P(0) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(k)$.

Question 9) On écrit $Q = \sum_{k=0}^m \frac{(\Delta^k Q)(0)}{k!} G_k$, puis on « intègre » (vous aurez remarqué la ressemblance entre la dérivation

et l'opérateur Δ) : $\Gamma^{-1}(Q) = \sum_{k=0}^m \frac{(\Delta^k Q)(0)}{(k+1)!} G_{k+1}$

Puis on utilise la relation précédente : $\Gamma^{-1}(Q) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} Q(j) \frac{G_{k+1}}{(k+1)!}$

Question 10) On applique les résultats des questions 9 et 6c, on trouve $\sum_{k=0}^N k^4 = \frac{6N^5 + 15N^4 + 10N^3 - N}{30}$