Problème 1

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice M est un commutateur quand il existe $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $M = AB - BA$.

On note $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la diagonale est nulle.

Partie 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note φ_A l'application définie par : pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi_A(M) = AM - MA$.

Question 1) Montrez que φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 2) On note H l'ensemble des matrices de trace nulle. Justifiez que H est un s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donnez sa dimension.

Question 3) Montrez de deux façons que φ_A n'est pas un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$...

a) en étudiant son noyau ;

b) en comparant $\operatorname{Im} \varphi_A$ et H.

Question 4) Dans cette question, on suppose que A est une matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont distincts.

a) En notant $B = (b_{ij}) = AM - MA$ et $M = (m_{ij})$, donnez l'expression de b_{ij} en fonction des coefficients m_{ij} et des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

b) Montrez que $\operatorname{Im} \varphi_A = \mathscr{N}_n(\mathbb{R})$.

Partie 2

On appelle $\mathscr{P}(n)$ la proposition suivante :

« si E est un $\mathbb{R}$ - e.v. de dimension n et f un endomorphisme de E de trace nulle, alors on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f appartient à $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ ».

Bien sûr, dans le cas où f est l'application nulle, toute base de E convient.

On suppose dans les questions 1 à 4 que E est un $\mathbb{R}$- e.v. de dimension n, que f est un endomorphisme de E de trace nulle et n'est pas l'application nulle.

Question 1) Montrez que f n'est pas une homothétie vectorielle.

Question 2)

a) On suppose dans cette question qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Montrez qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x)$ ne soit pas colinéaire à x (on pourra s'intéresser aux vecteurs $e_i + e_j$).

b) Montrez que le résultat précédent est vrai aussi dans le cas contraire.

D'après l'étude des deux cas précédents, on peut donc trouver un vecteur x tel que $f(x)$ ne soit pas colinéaire à x.

Question 3)

a) Justifiez l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E qui commence par les vecteurs $x, f(x)$. On note $\mathscr{C}$ la famille $\mathscr{B}$ à laquelle on enlève le vecteur x.

b) Soit $F = \text{vect}(\mathscr{C})$. Justifiez que F est un supplémentaire de $\text{vect}(x)$ dans E. On appelle p le projecteur sur F parallèlement à $\text{vect}(x)$.

Question 4)

a) Que peut-on dire du coefficient (1,1) de la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$?

b) Soit $g : F \to F$ définie par : pour tout $v \in F$, $g(v) = p \circ f(v)$. Montrez que la matrice de g dans la base $\mathscr{C}$ est obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de A.

c) Montrez alors que g est de trace nulle.

Question 5) Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Partie 3

Question 1) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de trace nulle.

a) Montrez que A est semblable à une matrice T de $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrez que T est un commutateur.

c) Déduisez-en que A est aussi un commutateur.

Question 2) Exemples numériques : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donnez deux matrices B, C telles que $A = BC - CB$. Faites la même chose avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 3) Concluez : quel résultat a-t-on démontré à propos de l'ensemble des commutateurs ?

Problème 1

Partie 1

Question 1) Facile : le produit par une matrice fixée est linéaire...

Question 2) La trace est une forme linéaire non nulle et H est son noyau, donc H est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Sa dimension est donc $\dim H = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - 1 = n^2 - 1$

Question 3)

a) Il est évident que $\varphi_A(I_n) = 0$ donc le noyau de φ contient un élément non nul, autrement dit φ_A n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

b) Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AM - MA) = \operatorname{tr}(AM) - \operatorname{tr}(MA) = 0$ d'après le cours donc $\operatorname{Im} \varphi_A \subset H$. Comme H est strictement inclus dans E, $\operatorname{Im} \varphi_A$ l'est aussi donc φ_A n'est pas surjective, donc n'est pas un automorphisme.

Question 4)

a) $b_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)m_{ij}$.

b) On constate que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_{ii} = 0$ donc ceci prouve que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi_A(M) \subset \mathscr{N}_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement, si $N \in \mathscr{N}_n(\mathbb{R})$, alors il est facile de lui trouver un antécédent par φ_A : on choisit la matrice M telle que si $i \neq j$, $m_{ij} = \dfrac{1}{\lambda_i - \lambda_j} n_{ij}$ ce qui est possible car $\lambda_i \neq \lambda_j$ et si $i = j$, on choisit ce qu'on veut pour m_{ii}.
Donc $\operatorname{Im} \varphi_A = \mathscr{N}_n(\mathbb{R})$

Partie 2

Question 1) Si f est une homothétie de rapport k, alors sa trace est égale à nk, or celle-ci est nulle donc $k = 0$ et f est l'application nulle, ce qui contredit l'hypothèse. Donc f n'est pas une homothétie.

Question 2)

a) Dans la base $b = (e_1, ..., e_n)$, la matrice de f est diagonale : on note $a_1, \ldots, a_n$ les coefficients diagonaux.
f n'étant pas une homothétie, il existe deux indices $i \neq j$ tels que $a_i \neq a_j$ donc $f(e_i + e_j) = a_i e_i + a_j e_j$ n'est pas colinéaire à $e_i + e_j$.

b) La matrice de f n'est diagonale dans aucune base de E : on choisit une base au hasard, il existe un vecteur e de cette base tel que $f(e)$ n'est pas colinéaire à e.

Question 3)

a) Comme $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, la famille $(x, f(x))$ est libre donc d'après le th. de la base incomplète, on peut lui ajouter des vecteurs pour obtenir une base de E. On a donc une base $\mathscr{B}$ de E qui commence par $(x, f(x), \ldots)$.

b) $\mathscr{C}$ est une famille libre et a $n-1$ vecteurs donc $F = \operatorname{vect}(\mathscr{C})$ est un hyperplan et x n'appartient pas à cet hyperplan, donc d'après le cours, $\operatorname{vect}(x)$ est un supplémentaire de F.

Question 4)

a) La première colonne de A contient les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathscr{B} = (x, f(x), \ldots)$, donc c'est la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$, donc le coefficient (1,1) de A est nul.

b) On note pour simplifier $\mathscr{C} = (e_2, \ldots, e_n)$ de sorte que $\mathscr{B} = (x, e_2, \ldots, e_n)$. Et on note $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour calculer la matrice de g, on doit calculer les coordonnées de $g(e_2), \ldots, g(e_n)$ dans la base $\mathscr{C}$.
Pour $j \in [\![2, n]\!]$, $g(e_j) = a_{1j}x + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{ij} e_i$: dans cette somme, le terme $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{ij} e_i$ est un vecteur de F donc en projetant $f(e_j)$ sur F parallèlement à $\operatorname{vect}(x)$, on ne garde que cette partie, autrement dit $g(e_j) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{ij} e_i$.
Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a donc $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}} g = (a_{ij})_{2 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.
On constate que la matrice A' de g est obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de A.

c) $\operatorname{tr}(g) = \operatorname{tr}(A') = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{ii}$, or $a_{11} = 0$ donc $\operatorname{tr}(g) = a_{11} + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr}(f) = 0$.

Question 5) $\mathscr{P}(1)$ est vraie, car le seul endomorphisme en dimension 1 de trace nulle est l'application nulle.

Si $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie ($n \geqslant 2$), alors on utilise les questions précédentes en gardant les mêmes notations.

Alors g est un endomorphisme de F, espace de dimension $n-1$, de trace nulle. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{C}'$ de F telle que $C' = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}'} g$ appartienne à $\mathscr{N}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Soit $\mathscr{B}' = (x, \mathscr{C}')$: $\mathscr{B}'$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme (par blocs) $A' = \begin{pmatrix} 0 & ? & \dots & ? \\ ? & & & \\ \vdots & & C' & \\ ? & & & \end{pmatrix}$

En effet, l'image de x par f appartient à F donc $f(x)$ est combinaison linéaire exclusivement des vecteurs de $\mathscr{C}'$, donc sa première coordonnée dans la base $\mathscr{B}'$ est nulle.

Or la diagonale de C' est nulle, donc celle de A' l'est aussi, on a donc trouvé une base de E dans laquelle la matrice de f est dans $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$. Donc la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Partie 3

Question 1)

a) On interprète le résultat en termes matriciels.
Soit f l'endomorphisme de matrice A dans une base de E choisie quelconque, f est alors de trace nulle, donc il existe une autre base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f est T de diagonale nulle.
A et T sont les matrices d'un même endomorphisme donc elles sont semblables.

b) On choisit une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous différents : par exemple, D de diagonale $1, 2, \dots, n$.
D'après la question 4 de la partie 1, $\operatorname{Im} \varphi_D = \mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ donc comme $T \in \mathscr{N}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice carrée M telle que $DM - MD = T$, autrement dit T est un commutateur.

c) On résume : il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ et M telle que $T = DM - MD$, donc $A = P(DM - MD)P^{-1} = (PDP^{-1})(PMP^{-1}) - (PMP^{-1})(PDP^{-1})$, donc A est un commutateur.

Question 2) On applique les idées précédentes.

— Pour la matrice A de taille $(2,2)$, on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on choisit un vecteur x qui a une image non colinéaire (par exemple, le premier vecteur de la base dans laquelle on travaille : e_1 de coordonnées $(1,0)$), la base $\mathscr{C}$ est donc réduite au vecteur $f(x)$ de coordonnées $(1,2)$.
La matrice de passage P est alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis on cherche une matrice M telle que $T = DM - MD$, par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, enfin on écrit $A = BC - CB$ en posant $B = PDP^{-1}$ et $C = PMP^{-1}$.
On trouve $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

— Même chose en ajoutant une dimension : dans ce cas, il faut vraiment utiliser le th. de la base incomplète.
Soit $\mathscr{B}$ la base de départ dans laquelle f a pour matrice A.
On choisit un vecteur x qui a une image non colinéaire (par exemple, le vecteur x de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$), $f(x)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ et on complète avec le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
La matrice de passage vers cette base $\mathscr{B}_1$ est alors $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et la matrice de f dans cette base est $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Cette matrice est semblable à A et a gagné un zéro sur la diagonale. On applique la méthode vue dans la partie 2 : on change encore de base pour avoir des zéros sur la diagonale de la partie en bas à droite.
Soit $y = f(x) + e_3$ le vecteur de coordonnées $(0,1,1)$ dans la base $\mathscr{B}_1$ donc de coordonnées $(2,0,1)$ dans la base $\mathscr{B}$: c'est un vecteur de l'hyperplan F dont l'image par g n'est pas colinéaire. $g(y) = f(x) - e_3$ a pour coordonnées

$(0,1,-1)$ dans la base $\mathscr{B}$, donc de coordonnées $(2,-1,-1)$ dans la base $\mathscr{B}$. La famille $\mathscr{B}_2 = (x, y, g(y))$ est une base de E et la matrice de f dans cette base a une diagonale nulle.

On pose donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Et la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_2$ est $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Puis on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, puis on cherche une matrice M telle que $T = DM - MD$, par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ 1/4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, enfin on écrit $A = BC - CB$ en posant $B = PDP^{-1}$ et $C = PMP^{-1}$.

On trouve $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/6 & 1/6 & 5/2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3/2 \\ -3/4 & 0 & -3/2 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Question 3) On a montré que toute matrice de trace nulle est un commutateur, mais la réciproque est vraie d'après les propriétés de la trace, donc finalement l'ensemble des commutateurs est l'ensemble des matrices de trace nulle, donc c'est un espace vectoriel, ce qui n'est nullement évident d'après la définition de commutateur.