Problème 1 - Sous-anneau engendré par un endomorphisme

Dans ce problème, E désigne un $\mathbb{R}$-e.v. On note I l'application identité de E. La notation $\underset{\mathbb{Z}}{\text{vect}}(\ldots)$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de ...

Si f est un endomorphisme de E, on appelle $A(f)$ le sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$ engendré par f, c'est-à-dire le plus petit sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$ contenant f.

Question 1) On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Montrez que $A(f) = \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{Z}[X]\}$.

Question 2) Un exemple : dans cette question, on suppose que f est un projecteur différent de I et de 0.

a) Montrez que $A(f) = \underset{\mathbb{Z}}{\text{vect}}(\text{I}, f)$.

b) Déterminez le groupe des inversibles de l'anneau $A(f)$: vous vérifierez qu'il n'a que 4 éléments que vous reconnaîtrez.

Dans toute la suite, E est de dimension 3, $\mathscr{B}$ est une base de E et f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 3) L'endomorphisme f est-il un automorphisme ? Précisez son noyau et son image en donnant une base de chacun d'eux. Sont-ils supplémentaires ?

Question 4) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda = \{x \in E \ / \ f(x) = \lambda x\}$.

a) Montrez que pour tout λ, E_λ est un s.e.v. de E.

b) Montrez que E_λ est réduit à $\{0\}$ sauf pour trois valeurs de λ que vous préciserez. Pour chacune de ces trois valeurs, donnez une base de E_λ.

Question 5) Montrez qu'en réunissant les trois bases précédentes, on obtient une base $\mathscr{C}$ de E. Donnez la matrice D de f dans la base $\mathscr{C}$.

Question 6) Montrez que $f^3 \in \underset{\mathbb{Z}}{\text{vect}}(f, f^2)$.

Question 7) Montrez que $A(f) = \underset{\mathbb{Z}}{\text{vect}}(I, f, f^2)$.

Question 8) Montrez que le groupe des inversibles de l'anneau $A(f)$ est un ensemble à 4 éléments.

Devoir non surveillé 13 - Corrigé

Problème 1

Question 1) $A(f)$ contient f et est stable par $\circ$, donc il contient $f \circ f = f^2$, $f \circ f^2 = f^3$, etc Par récurrence immédiate, $A(f)$ contient les endomorphismes f^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme il contient aussi le neutre pour la composition, il contient donc tous les endomorphismes f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Puis comme il est stable par $+$, il contient $f^n + f^n = 2f^n$ et plus généralement tous les af^n où $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$ (par récurrence sur a). Puis comme il est stable par opposition, il contient tous les af^n où $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$.

Puis toujours par stabilité par $+$, il contient toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers des puissances de f, autrement dit il contient tous les $P(f)$ où $P \in \mathbb{Z}[X]$.

Autrement dit $F \subset A(f)$.

Réciproquement, il est facile de voir que $F = \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{Z}[X]\}$ est un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$ qui contient f :
- F contient $1(f) = \mathrm{I}$ et $X(f) = f$
- Soit $(P, Q) \in \mathbb{Z}[X]^2$, alors $P(f) + Q(f) = (P+Q)(f) \in F$ et $P(f) \circ Q(f) = (P \times Q)(f) \in F$, car $P + Q$ et $P \times Q$ sont deux polynômes à coefficients entiers

F est donc une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$, stable par $+$ et $\circ$, contenant I, donc F est un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$, qui de plus contient f.

Comme $A(f)$ est le plus petit sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$ qui contient f (plus petit au sens de l'inclusion), alors on en déduit que $A(f) \subset F$.

On a donc les deux inclusions, finalement $A(f) = \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{Z}[X]\}$.

Question 2)

a) Soit $g \in A(f)$. Il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $g = P(f)$. On effectue la division euclidienne de P par $X^2 - X$ (pourquoi $X^2 - X$? parce que $f^2 - f = 0$!) : il existe $(Q, R) \in \mathbb{Z}[X]^2$ tel que $P = (X^2 - X)Q + R$ et $\deg R < 2$. Donc $g = P(f) = (f^2 - f) \circ Q(f) + R(f) = R(f) = af + b\mathrm{I}$ si on note $R = aX + b$.

   Ceci prouve que $A(f) \subset \underset{\mathbb{Z}}{\mathrm{vect}}(\mathrm{I}, f)$.

   L'inclusion dans l'autre sens est immédiate.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $g = af + b\mathrm{I}$ soit un inversible de l'anneau $A(f)$. Il existe donc $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $h = cf + d\mathrm{I}$ soit l'inverse de g.

   $h \circ g = \mathrm{I}$ donne alors $(ac + ad + bc)f + bd\mathrm{I} = \mathrm{I}$ (rappel : $f^2 = f$). Or la famille (I, f) est libre donc on en déduit les deux égalités $bd = 1$ et $ac + ad + bc = 0$.

   b et d étant deux entiers, on a alors $b = d \in \{-1, +1\}$, donc
   - si $b = 1$, alors $d = 1$ et $ac + a + c = 0$, c'est-à-dire $(1+a)(1+c) = 1$ donc encore $1 + a = 1 + c \in \{-1, +1\}$, ce qui revient à $a = c = 0$ ou $a = c = -2$;
     finalement $g = \mathrm{I}$ ou $g = -2f + \mathrm{I}$ dans le cas $b = 1$
   - si $b = -1$, on a de même $g = -\mathrm{I}$ ou $g = 2f - \mathrm{I}$.

   Soit 4 candidats-solutions : I, $-2f + \mathrm{I}$, $-\mathrm{I}$, $2f - \mathrm{I}$.

   Réciproquement, ils conviennent, car I et $-\mathrm{I}$ sont clairement inversibles d'inverse dans $A(f)$ et $2f - \mathrm{I}$ et $-2f + \mathrm{I}$ sont les deux symétries associées au projecteur f donc sont inversibles d'inverse elle-même, élément de $A(f)$.

Question 3) On calcule le rang de A par la méthode du pivot de Gauss :

$$A \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci prouve que A est de rang 2, donc que $\mathrm{rg}\, f = 2 \neq \dim E$, autrement dit f n'est pas un automorphisme. D'après le th. du rang, f n'est ni injectif, ni surjectif.

On a de plus $\mathrm{rg}\, f = 2$, donc d'après le th. du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$.

On peut remarquer que la dernière colonne nulle est celle des coordonnées du vecteur $f(e_3) + f(e_1) + f(e_2)$, donc on a aussi prouvé que $f(e_1 + e_2 + e_3) = 0$: le vecteur $u_0 = e_1 + e_2 + e_3$ appartient au noyau, qui est de dimension 1, donc une base de $\mathrm{Ker}\, f$ est la famille à un seul vecteur (u_0).

Les deux autres colonnes de la matrice finale sont les matrices-colonnes des coordonnées de deux vecteurs de l'image de f, qui sont $f(e_2), f(e_1)+f(e_2)=f(e_1+e_2)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$, espace de dimension 2, donc ils forment une base de $\operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(u_0)$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(e_2), f(e_1+e_2))$ donc $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(u_0, f(e_2), f(e_1+e_2))$. On pose $\mathscr{B}' = (u_0, f(e_2), f(e_1+e_2))$: c'est une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

On écrit la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$: $\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, puis on calcule son rang (sans détails cette fois-ci), on trouve 3 : il s'agit donc d'une famille de trois vecteurs de rang 3 dans un espace de dimension 3, donc c'est une base de E.

On a donc prouvé que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$; de plus, le th. du rang donne $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$; donc le th. "3 pour le prix de 2" assure que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Question 4)

a) $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{I})$ est le noyau d'une application linéaire de E dans ..., donc E_λ est un s.e.v. de E.

b) Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$. On a l'équivalence $u \in E_\lambda \iff f(u) = \lambda u \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2y - 2z & = & \lambda x \\ x + y - 2z & = & \lambda y \\ x - y & = & \lambda z \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda x + 2y - 2z & = & 0 \\ x + (1-\lambda)y - 2z & = & 0 \\ x - y - \lambda z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - \lambda z & = & 0 \\ (2-\lambda)y + (-2+\lambda)z & = & 0 \\ (2-\lambda)y - (2+\lambda^2)z & = & 0 \end{array} \right.$

On voit tout de suite un cas particulier : $\lambda = 2$. Étudions d'abord ce cas : le système est alors équivalent à $\left\{ \begin{array}{rcl} x - y - 2z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -6z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

Autrement dit, si $\lambda = 2$, alors E_2 est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Maintenant, si $\lambda \neq 2$, alors on peut diviser la deuxième ligne par $2 - \lambda$, le système est donc équivalent à
$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y - \lambda z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \\ (2-\lambda)y - (2+\lambda^2)z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - \lambda z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \\ (-\lambda - \lambda^2)z & = & 0 \end{array} \right.$

On voit donc les deux derniers cas particuliers : $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.

Dans le cas $\lambda = 0$, on retombe sur le noyau de f, dont on connaît une base (u_0) où $u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Dans le cas $\lambda = -1$, on trouve que E_{-1} est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $u_{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Dans les autres cas, $E_\lambda = \{0\}$.

Question 5) On pose $\mathscr{C} = (u_0, u_2, u_{-1})$, on calcule son rang (sans détails) et on vérifie que le rang est 3 : on a donc une famille de rang 3 de 3 vecteurs de E, espace de dimension 3. Donc $\mathscr{C}$ est une base de E.

Comme $f(u_0) = 0$, $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_{-1}) = -u_{-1}$, on en déduit que la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 6) $\underset{\mathscr{C}}{\operatorname{mat}} f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\underset{\mathscr{C}}{\operatorname{mat}} f^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il est alors facile de constater que $f^3 = f^2 + 2f$, donc que $f^3 \in \underset{\mathbb{Z}}{\operatorname{vect}}(\mathrm{I}, f, f^2)$.

Question 7) On vient de constater que $f^3 - f^2 - 2f = 0$.

D'abord, $\underset{\mathbb{Z}}{\operatorname{vect}}(I, f, f^2) = \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{Z}_2[X]\} \subset \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{Z}[X]\} = A(f)$.

Ensuite pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, si on le divise par $X^3 - X^2 + 2X$, on obtient l'existence de deux polynômes Q et R tels que $P = (X^3 - X^2 + 2X)Q + R$ et $\deg R \leqslant 2$, donc $P(f) = (f^3 - f^2 + 2f) \circ Q(f) + R(f) = R(f) \in \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{Z}_2[X]\}$.

Ceci prouve que $A(f) = \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{Z}_2[X]\} \subset \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{Z}_2[X]\}$.

Au total, on a la double inclusion, d'où l'égalité.

Question 8) Soit $g \in A(f)^\times$. Alors il existe $h \in A(f)$ tel que $g \circ h = h \circ g = \mathrm{I}$. Comme il s'agit d'endomorphismes en dimension finie, on peut ne s'intéresser qu'à une seule égalité, l'autre étant alors automatique.

On écrit $g = a\mathrm{I} + bf + cf^2$ et $h = \alpha\mathrm{I} + \beta f + \gamma f^2$, où $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sont 6 entiers relatifs.

Donc $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}} g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + 2b + 4c & 0 \\ 0 & 0 & a - b + c \end{pmatrix}$ et de même pour celle de h en remplaçant les lettres.

Or on veut que le produit de ces deux matrices soit la matrice identité, il vient donc les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a\alpha & = & 1 \\ (a + 2b + 4c)(\alpha + 2\beta + 4\gamma) & = & 1 \\ (a - b + c)(\alpha - \beta + \gamma) & = & 1 \end{array} \right. \text{ qui sont trois produits d'entiers.}$$

Donc on a $a = \alpha = 1$ ou $a = \alpha = -1$.

Dans le cas où $a = 1$, il vient $\left\{ \begin{array}{rcl} 1 + 2b + 4c & = & 1 \text{ ou } -1 \\ 1 - b + c & = & 1 \text{ ou } -1 \end{array} \right.$.

On traite alors chacun des 4 sous-cas, on voit que deux d'entre eux aboutissent à des solutions non entières, il n'en reste que 2 : $b = c = 0$ ou $b = 1, \ c = -1$.

On fait de même dans le cas où $a = -1$, on trouve encore 2 solutions.

Au total, on a 4 solutions pour g (on vérifie bien qu'elles conviennent) : I, $-I$, $I + f - f^2$ et $-I - f + f^2$.