DÉTERMINANTS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

****1)** Calculez les déterminants suivants sous forme factorisée :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & a+c \\ ab & bc & ac \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ac \\ 1 & b & c & bd \\ 1 & c & d & ac \\ 1 & d & a & bd \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & b+c+d \\ 1 & b & b^2 & a+c+d \\ 1 & c & c^2 & a+b+d \\ 1 & d & d^2 & a+b+c \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} a & b & a & c \\ b & a & c & a \\ a & c & a & b \\ c & a & b & a \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$ o) $\begin{vmatrix} a & a & b & c \\ b & a & b & c \\ c & b & c & d \\ d & b & c & d \end{vmatrix}$

****2)** Calculez les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ où $(a_1,\dots,a_n)\in K^n$. b) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ \vdots & \diagup & \iddots & a \\ 0 & \alpha_2 & \diagup & \vdots \\ \alpha_1 & a & \cdots & a \end{vmatrix}$ où $(\alpha_1,\dots,\alpha_n,a)\in K^{n+1}$.

c) $\begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & y & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & y & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & y \end{vmatrix}$ où $x\in\,]-1,1[$ et $y=1+x^2$.

****3)** Calculez les déterminants des matrices $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_n(K)$ définies par les relations suivantes :

a) $a_{i,j}=\begin{cases} i & \text{si } i\neq j \\ x+i & \text{si } i=j \end{cases}$ b) $a_{i,j}=\begin{cases} j & \text{si } j>i \\ -j & \text{si } i>j \\ 1 & \text{si } i=j=1 \\ 0 & \text{si } i=j\geqslant 2 \end{cases}$ c) $a_{i,j}=\begin{cases} x & \text{si } i\neq j \\ y & \text{si } i=j \end{cases}$

d) $a_{i,j}=\begin{cases} x & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j,\ i\leqslant n-1,\ j\leqslant n-1 \\ n-i & \text{si } j=n \text{ et } i\leqslant n-1 \\ n-j & \text{si } i=n \text{ et } j\leqslant n-1 \end{cases}$ e) $a_{i,j}=x^{|i-j|}$ f) $a_{i,j}=\begin{cases} n & \text{si } i\neq j \\ i & \text{si } i=j \end{cases}$

g) $a_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \text{ ou } j=1 \text{ ou } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ h) $a_{i,j}=\min(i,j)$ i) $a_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{si } i\neq j \\ 1+c_i & \text{si } i=j \end{cases}$

****4)** Calculez les déterminants d'ordre $2n$ suivants où a,b,c,d sont 4 scalaires :

a) $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a & b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & b & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b \\ c & 0 & \cdots & 0 & d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}$

****5)** Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $M(x) = (a_{ij} + x)_{1\leq i,j\leq n}$. Montrez que $x \longmapsto \det(M(x))$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

Déduisez-en

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix},$$

où $(a,b,c) \in K^3$, $b \neq c$.

***6)** Soit $A \in \mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrez que A n'est pas inversible. Qu'en est-il si $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

****7)** Calculez le déterminant de $((-1)^{i+j}a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

****8)** Soit A une matrice dont tous les coefficients valent ± 1. Montrez que $\det(A) \in \mathbb{Z}$ et que $2^{n-1} \mid \det(A)$.

****9)** Soit $(U,V) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$.

a) Justifiez que la fonction $x \mapsto \det(U + xV)$ est une fonction polynôme.

b) Montrez que s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\det(U + zV) \neq 0$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(U + xV) \neq 0$.

Application Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on suppose que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: montrez qu'elles sont alors semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

****10)** Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $AB = BA$. Montrez que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

****11)**

a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrez que A est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, +1\}$.

b) À quelle condition sur $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ existe-t-il une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ et de première ligne (a,b) ?

c) Généralisez : on donne $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^n$, à quelle condition existe-t-il une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ et de première ligne $(a_1,\dots,a_n)$?

****12)** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}} f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Déterminez les éléments propres de f.

b) Montrez qu'il existe une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

****13)** Même exercice avec $\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

****14)** Soit E un K-e.v. de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f possède n valeurs propres distinctes. Montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

****15)** Soit E un K-e.v. de dimension finie, f un endomorphisme de rang 1.

a) Montrez que les valeurs propres de f sont 0 et $\operatorname{tr}(f)$ (indication : exercice 28 sur les matrices).

b) Précisez la dimension des sous-espaces propres.

c) Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.