Déterminants

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Déterminant d'une matrice

1.1 Définition et propriétés

Théorème 1. *Il existe une unique application* $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *telle que*

- $\det$ *est linéaire par rapport à chaque colonne de sa variable (qui est une matrice) : on dit que* $\det$ *est une forme* n*-linéaire sur les colonnes ;*
- $\det$ *est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable :*
$$\text{si } A \underset{C_i \leftrightarrow C_j}{\sim} B, \text{ alors } \det(B) = -\det(A) \text{ :}$$
on dit que $\det$ *est une forme alternée sur les colonnes ;*
- $\det I_n = 1$.

L'application det est appelée déterminant.

Le théorème précédent fournit de plus l'expression de $\det A$ en fonction des coefficients de A.

Proposition 1. *Si* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, *alors*

$$\det A =$$

Si A est une matrice, le déterminant de A est noté comme A mais en remplaçant les parenthèses par des barres verticales.

On en déduit des propriétés générales du déterminant :

Proposition 2. *Soit* $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

- *Si* A *contient une colonne nulle, alors* $\det A = 0$.
- *Si* A *contient deux colonnes identiques, alors* $\det A = 0$.
- *Si* B *est obtenue à partir de* A *en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres, alors* $\det B = \det A$.
- *Si* A *n'est pas inversible, alors* $\det A = 0$.
- *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

Remarque. Le déterminant n'est pas linéaire ! En général, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

On a cependant un résultat à propos du produit par un scalaire : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

En fait, on a démontré un peu mieux.

Proposition 3. *L'ensemble des formes* n*-linéaires de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$*, alternées sur les colonnes, est une droite vectorielle.*

1.2 Étude pour $n = 2$ ou $n = 3$

Proposition 4. *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *alors* $\det A = ad - bc$.

Proposition 5. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.
Alors $\det A = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3$

Au delà de $n = 4$, les formules explicites sont quasiment inutilisables.

Exercices :

1) Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Déduisez-en la valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{vmatrix}$ en fonction de x
2) Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

1.3 Une méthode de calcul

D'abord, on déduit des propriétés du déterminant le résultat suivant très simple.

Proposition 6. *Soit* $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.
Si B *est obtenue à partir de* A *en effectuant des opérations du type* $C_i \leftrightarrow C_j$ *ou* $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j$, *alors* $\det B = (-1)^s \det A$, *où* s *est le nombre d'échanges de colonnes effectués dans la transformation de* A *en* B.

Puis une application de ce résultat.

Proposition 7. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

On en déduit une méthode générale de calcul d'un déterminant : le pivot de Gauss.

1.4 Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 2. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A *est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Conséquence : une matrice ayant une ligne nulle est de déterminant nul.

1.5 Déterminant d'un produit de matrices

Théorème 3. *Soit* $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.
Alors

- $\det(AB) = \det A \times \det B$;
- *si* A *est inversible, alors* $\det A \neq 0$ *et* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

1.6 Déterminant d'une transposée

Proposition 8. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $\det(A^T) = \det A$.

Conséquence : tout ce qui est autorisé sur les colonnes des matrices pour calculer un déterminant l'est aussi sur les lignes.

1.7 Développement selon une ligne ou une colonne

Proposition 9. *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on note $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.*

Alors on a les égalités suivantes :

- $\det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ *(développement par rapport à la j-ème colonne) ;*
- $\det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ *(développement par rapport à la i-ème ligne).*

Il est intéressant de développer par rapport à une ligne ou une colonne quand cette ligne ou cette colonne contient beaucoup de zéros : quand il ne reste qu'un seul élément non nul, on ramène le calcul du déterminant d'ordre n à un déterminant d'ordre $n-1$.

Exercices :

3) Pour $n \geqslant 1$, on pose D_n le déterminant de la matrice A_n telle que $a_{ii} = 5 \in \mathbb{C}$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 2$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
Donnez une relation récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}. Puis donnez la valeur de D_n en fonction de n.
4) Pour $n \geqslant 1$, soit $(x, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on pose D_n le déterminant de la matrice A_n telle que $a_{i,i} = x$, $a_{i+1,i} = 1$ et $a_{i,n} = -b_i$ pour $i \leqslant n-1$, $a_{n,n} = x - b_n$ et $a_{i,j} = 0$ dans les autres cas. Calculez D_n

2 Déterminant d'une famille de n vecteurs

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n ($n \geqslant 1$), $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle déterminant de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ le déterminant de la matrice de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Il est noté $\det\limits_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$.

Le résultat principal à ce propos est la caractérisation des bases.

Théorème 4. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n ($n \geqslant 1$), $\mathscr{B}$ une base de E.*

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.

La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E si et seulement si $\det\limits_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 10. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n ($n \geqslant 1$), f un endomorphisme de E.*

Toutes les matrices de f dans des bases de E ont le même déterminant : ce déterminant ne dépend donc pas du choix de la base, il ne dépend que de f, on l'appelle déterminant de f, note $\det f$.

Des propriété du déterminant de matrices découlent celles du déterminant d'endomorphismes.

Théorème 5. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n ($n \geqslant 1$), f, g deux endomorphismes de E, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Alors

- $\det(f \circ g) = \det f \times \det g$;
- *f est un automorphisme si et seulement si $\det f \neq 0$, dans ce cas $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det f}$.*
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.

Remarque. En général, $\det(f+g) \neq \det f + \det g$.

Exercices :

5) Quel est le déterminant d'une symétrie par rapport à un hyperplan ? D'une symétrie quelconque ?

4 Quelques applications du déterminant

4.1 Déterminant de Vandermonde

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle matrice de Vandermonde associée à la famille $(a_1, \dots, a_n)$ la matrice

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Cette matrice intervient dans la résolution en système linéaire du problème d'interpolation polynômiale.

Proposition 11. *Avec les mêmes notations,* $D = \det V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Par conséquent, $D \neq 0$ *si et s.si les nombres* $a_1, \dots, a_n$ *sont distincts.*

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

4.2 Aire dans le plan et volume dans l'espace

Proposition 12. *Soit* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée du plan géométrique. Soit* (A, B, C, D) *un parallélogramme.*

Alors l'aire de (A, B, C, D) *est égale à* $|\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

On a le même type de résultat dans l'espace géométrique.

Proposition 13. *Soit* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de l'espace géométrique. Soit* P *un parallélépipède construit sur trois vecteurs* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Alors le volume de P *est égal à* $|\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$.

4.3 Formules de Cramer

Un système linéaire à n équations et n inconnues est dit de Cramer quand il a une unique solution (remarque : justifiez que cette définition ne dépend pas du second membre !).

Proposition 14. *Soit* S *un système de Cramer de matrice* A*, de matrice des seconds membres* B*, dont les inconnues sont* $x_1, \dots, x_n$.

Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$*, si on note* A_i *la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de* A *par la colonne* B*, on a* $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$.

4.4 Inversion de matrices

Définition. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on note $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne et $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$: $\Delta_{i,j}$ est appelé le cofacteur de $a_{i,j}$.

On appelle comatrice de A la matrice des cofacteurs : $\operatorname{com} A = (\Delta_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 15. *Pour toute matrice* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A . \operatorname{com} A^T = \operatorname{com} A^T . A = \det(A)\, I_n$.

Par conséquent, si $\det A \neq 0$, *alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{com} A^T$.

***Exercices* :**

6) Donnez l'expression générale de l'inverse d'une matrice $(2,2)$ inversible.

7) Calculez l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5 Éléments propres

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, f un endomorphisme de E, $\lambda \in \mathbb{K}$.

5.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition. On dit que λ est une valeur propre de f quand il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$.

Tout vecteur x vérifiant cette propriété est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f, noté $\operatorname{Sp}(f)$.

***Exercices* :**

8) Quel est le spectre d'une homothétie vectorielle ? D'un projecteur ? D'une symétrie ?

9) Soit f un endomorphisme tel que $f^2 = 5f - 6\operatorname{Id}_E$. Que dire des valeurs propres de f ?

5.2 Polynôme caractéristique

Proposition 16. *λ est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas inversible.*

Définition. On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\chi_f = \det(X \operatorname{Id}_E - f)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Théorème 6. *Le polynôme χ_f est unitaire de degré n et les valeurs propres de f sont les racines de χ_f.*

Par conséquent, f possède au plus n valeurs propres.

De plus, si A est une matrice représentant f dans une certaine base, alors $\chi_f = \det(XI_n - A)$, polynôme qu'on appelle aussi polynôme caractéristique de A.

***Exercices* :**

10) En dimension 2, exprimez le polynôme caractéristique de f à l'aide de sa trace et de son déterminant.

11) Donnez un exemple d'endomorphisme réel en dimension 2 qui ne possède pas de valeur propre.

12) Calculez le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5.3 Sous-espaces propres

Définition. Si λ est une valeur propre de f, on appelle sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ l'ensemble $\operatorname{sep}(f, \lambda) = \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{Id}_E - f)$.

Le sous-espace propre $\operatorname{sep}(f, \lambda)$ est donc l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul.

Proposition 17. *Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.*

La suite l'an prochain…