GROUPE SYMÉTRIQUE

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_9$. Décomposez σ en produit de cycles à support disjoints. Décomposez σ en produit de transpositions. Donnez la signature de σ. Calculez σ^{1000}.

***2)** Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_8$. Décomposez σ en produit de cycles à support disjoints. Décomposez σ en produit de transpositions. Donnez la signature de σ. Calculez σ^{2018}.

***3)** Soit τ et τ' 2 transpositions de $[\![1, n]\!]$.

Montrez que : $\quad \tau \circ \tau' = Id \quad$ ou $\quad (\tau \circ \tau')^2 = Id \quad$ ou $\quad (\tau \circ \tau')^3 = Id$

****4)** *Ordre d'une permutation* Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$.

a) Montrez qu'il existe $p \neq \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\sigma^p = \sigma^\ell$.

b) On appelle ordre de σ l'entier $m = \min \left\{ i \in \mathbb{N}^* \ / \ \sigma^i = \mathrm{Id} \right\}$. Justifiez son existence.

c) Quelle est l'ordre d'une transposition ? d'un k-cycle ?

d) Revenons à σ quelconque. On pose $\Omega = \left\{ i \in \mathbb{Z} \ / \ \sigma^i = \mathrm{Id} \right\}$. Montrez que $\Omega = m\mathbb{Z}$.

e) Déterminez l'ordre de σ en fonction de l'ordre des cycles apparaissant dans sa décomposition en produits de cycles à supports disjoints.

****5)** On dit qu'une partie E d'un groupe G engendre le groupe quand tout élément du groupe peut s'écrire comme un produit $x_1 \dots x_p$ d'éléments tels que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in E$ ou $x_i^{-1} \in E$.

a) Montrez que les transpositions suivantes $\quad (1, 2); (1, 3); ....; (1, n) \quad$ engendrent $\mathscr{S}_n$.

b) Montrez que les transpositions suivantes $\quad (1, 2); (2, 3); ....; (n-1, n) \quad$ engendrent $\mathscr{S}_n$.

c) Montrez que la transposition $(1, 2)$ et le cycle $(1, 2, \dots, n)$ engendrent $\mathscr{S}_n$.

****6)** Soit $n \geqslant 3$. Montrez que le centre du groupe $\mathscr{S}_n$ (l'ensemble des éléments de $\mathscr{S}_n$ qui commutent avec tous les autres) est réduit à $\{Id\}$

Un peu de vocabulaire sur les groupes : soit $(G, .)$ un groupe, e son neutre,

- ▷ soit g, h deux éléments de G, on dit qu'ils sont conjugués dans G quand il existe $x \in G$ tel que $g = xhx^{-1}$; il est facile de voir que cette relation est une relation d'équivalence, les classes d'équivalences s'appellent les classes de conjugaisons, elles forment donc une partition de G ;
- ▷ on dit qu'un sous-groupe H de G est normal quand pour tout $(g, h) \in G \times H$, $ghg^{-1} \in H$.

****7)**

a) Montrez que si deux permutations de $\mathscr{S}_n$ sont conjugués, alors elles ont le même nombre de points fixes.

b) Montrez que l'ensemble des transpositions est une classe de conjugaison.

****8)** Si σ est une permutation, on ordonne sa décomposition en cycles disjoints par ordre décroissant des longueurs des cycles et on appelle profil de σ la suite finie des longueurs des cycles (on ne prend pas en compte les cycles de longueur 1).

a) Montrez que si deux permutations σ et σ' sont à supports disjoints, alors pour toute permutation τ, $\tau\sigma\tau^{-1}$ et $\tau\sigma'\tau^{-1}$ sont aussi à supports disjoints.

b) Montrez que si deux permutations sont conjuguées, alors elles ont même profil.

c) Montrez que deux cycles de même longueur sont conjugués.

d) Montrez la réciproque du b : si deux permutations ont même profil, alors elles sont conjuguées.

****9)** *Groupe Alterné*

a) Montrez que $\mathscr{A}_n$ est un sous-groupe normal de $\mathscr{S}_n$ (on démontre en fait que si $n \geqslant 5$, alors c'est le seul, hormis $\mathscr{S}_n$ et $\{e\}$; ce résultat interdit l'existence d'une formule générale qui permettrait de donner les racines d'un polynôme de degré au moins 5)

b) Soit $n \geqslant 3$. Montrez que $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

c) Montrez que si $n \geqslant 5$ et si σ et σ' sont deux 3-cycles, alors σ et σ' sont conjugués dans $\mathscr{A}_n$. (Remarque : c'est cette propriété en apparence anodine qui fait qu'il est impossible de trouver une formule générale pour trouver les racines d'un polynôme de degré au moins 5... je n'entre pas dans les détails, c'est bien trop long !)

****10)** *Jeu de Taquin*

On dispose d'un carré 3×3 à neuf cases, dont une est vide et les autres occupées par un jeton numéroté. On peut à chaque coup faire glisser les jetons grâce à la case vide.

Une suite de coups possibles : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 7 & 8 & 6 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & 5 \\ \hline 7 & 8 & 6 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 3 \\ \hline 4 & 2 & 5 \\ \hline 7 & 8 & 6 \\ \hline\end{array}$

On lit une configuration du jeu en énumérant les numéros des jetons dans l'ordre de gauche à droite et de haut en bas, sans se soucier de la case vide : la dernière configuration se lit $1, 3, 4, 2, 5, 7, 8, 6$.

Quand on fait un glissement horizontal, on ne change pas la lecture des numéros. Quelle permutation est effectuée quand on fait un glissement vertical ?

On vous donne le carré dans lequel les jetons ont été déplacés et on vous demande de les remettre dans l'ordre croissant en respectant la règle du glissement. Voici votre carré initial : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & \\ \hline 8 & 3 & 7 \\ \hline 6 & 4 & 5 \\ \hline\end{array}$

Qu'en pensez-vous ?

****11)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ $2n$ réels. Pour $\sigma \in \mathscr{S}_n$, on pose $S(\sigma) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$.

a) Soit $\sigma \neq e$. On choisit (i, j) une inversion de σ et on note τ la transposition (i, j). Montrez que $S(\sigma) < S(\sigma\tau)$.

b) Montrez que pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $S(r) \leqslant S(\sigma) \leqslant S(e)$ où r est le retournement de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire la permutation telle que $r(i) = n + i - i$.