Groupe symétrique

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul.

1 Généralités

1.1 Définition générale

Définition. Soit E un ensemble non vide.
On appelle permutation de E toute bijection de E dans lui-même.
L'ensemble des permutations de E est noté $\mathscr{S}(E)$ ou $\mathfrak{S}(E)$.

Grâce aux propriétés classiques sur les bijections, il est facile de prouver le résultat suivant.

Proposition 1. *L'ensemble $(\mathscr{S}(E), \circ)$ est un groupe, en général non commutatif dès que E contient au moins 3 éléments.*

$\mathscr{S}(E)$ est appelé le groupe symétrique de E.

Définition. Si f est une permutation de E, on appelle point fixe de f tout élément x de E tel que $f(x) = x$.
On appelle support de f l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas fixés par f, noté $\mathrm{supp}(f)$.

$$\mathrm{supp}(f) = \{x \in E \ / \ f(x) \neq x\}$$

Le support de f est finalement le véritable ensemble sur lequel agit f : en dehors du support, f ne fait rien et f induit une application de $\mathrm{supp}(f)$ dans lui-même.

Lemme 1. *Soit f une permutation de E. Si $x \in \mathrm{supp}(f)$, alors $f(x) \in \mathrm{supp}(f)$.*

On en déduit une condition suffisante pour que deux permutations commutent.

Proposition 2. *Soit f, g deux permutations de E. Si $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g) = \varnothing$, alors $f \circ g = g \circ f$.*

1.2 Ensemble $\mathscr{S}_n$

Dans le cas où E est l'ensemble fini $E_n = [\![1, n]\!]$, on note plus simplement $\mathscr{S}_n$ l'ensemble $\mathscr{S}([\![1, n]\!])$.
À partir de maintenant, on n'étudie plus que le groupe $\mathscr{S}_n$, groupe symétrique d'indice n.
Si $f \in \mathscr{S}_n$, on note f comme un tableau à deux lignes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots, & f(n) \end{pmatrix}$.

***Exercices* :**

1) Dans le cas où $n = 6$, on pose $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
   Calculez $g \circ f$ et f^{-1}.

Proposition 3. *$\mathscr{S}_n$ est un ensemble fini de cardinal*

En général, les permutations de $[\![1, n]\!]$ sont notées à l'aide de lettres grecques minuscules $\sigma, \tau, \rho, \dots$.
Souvent on ne note pas le symbole de composition des fonctions : la composée de deux permutations σ et τ est notée simplement $\sigma\tau$ et est appelée le produit des deux permutations.
La permutation identité est souvent notée I ou e.

2 Transpositions

Définition. Une transposition de $\mathscr{S}_n$ est une permutation qui a $n-2$ points fixes, autrement dit qui échange deux entiers et ne change pas les autres.

Si τ est la permutation qui échange i et j, on la note $\tau = (i, j)$ ou $\tau = (j, i)$.

Proposition 4. *Toute transposition est involutive : si τ est une transposition, alors $\tau^{-1} = \tau$, ou ce qui revient au même $\tau^2 = e$.*

Le résultat principal concernant les transpositions est le théorème de décomposition en produits.

Théorème 1. *Toute permutation de $\mathscr{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions.*
On peut être plus précis : si σ est une permutation de $\mathscr{S}_n$, alors σ est un produit d'au plus $n-1$ transpositions.

Ce résultat prouve que tout ce qui peut être expliqué à l'aide de permutations peut l'être aussi à l'aide uniquement de transpositions.
Mais ce résultat a un léger défaut : il n'y a pas unicité d'une telle écriture.
***Exercices* :**

1) Dans le cas où $n = 6$, soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Écrivez de deux façons σ comme produits de transpositions.

3 Cycles

La notion de cycle généralise celle de transposition.

Définition. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. On dit que σ est un cycle de longueur k quand il existe $a_1, \dots, a_k$ k éléments de E_n tels que

$$\sigma(a_1) = a_2,\ \sigma(a_2) = a_3,\ \dots,\ \sigma(a_{k-1}) = a_k \ \text{ et } \ \sigma(a_k) = a_1$$

les autres éléments restant inchangés.
On note alors $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$, mais aussi $\sigma = (a_2, \dots, a_k, a_1)$ ou ...

Avec cette définition, on constate que les transpositions sont les cycles de longueur 2.

Proposition 5. *Si σ est un cycle de longueur k, alors $\sigma^k = e$, donc $\sigma^{-1} = \sigma^{k-1}$.*

On a de même un théorème de décomposition en cycles, mais plus précis.

Théorème 2. *Toute permutation de $\mathscr{S}_n$ peut s'écrire comme un produit commutatif de cycles à supports deux à deux disjoints. Une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

***Exercices* :**

1) Dans le cas où $n = 8$, on pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Donnez la décomposition de σ en produit de cycles disjoints.

4 Signature d'une permutation

On note $\mathscr{P}_2(n)$ l'ensemble des paires (*i.e.* 2-combinaisons) de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

Définition. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. On appelle signature de σ, notée $\varepsilon(\sigma)$, le nombre $\displaystyle\prod_{\{i,j\} \in \mathscr{P}_2(n)} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

On peut réécrire la signature sous la forme $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

Théorème 3.

- ▷ *Pour tout* $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, +1\}$.
- ▷ *Pour tout* $(\sigma, \tau) \in \mathscr{S}_n^2$, $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.
- ▷ $\varepsilon(e) = 1$.
- ▷ *Pour tout* $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Proposition 6. *La signature d'une transposition est* -1.
Par conséquent, la parité du nombre de transpositions dans la décomposition en produit de transpositions ne dépend que de la permutation.

***Exercices* :**

1) Quelle est la signature d'un cycle de longueur k ?

Les permutations σ telles que $\varepsilon(\sigma) = 1$ sont appelées les permutations paires, les autres sont les permutations impaires.

Proposition 7. *On note* $\mathscr{A}_n$ *l'ensemble des permutations paires.*
Alors $\mathscr{A}_n$ *est un sous-groupe de* $\mathscr{S}_n$*, appelé groupe alterné d'indice* n*. Il est de cardinal* $\dfrac{n!}{2}$.

Proposition 8. *Différentes façons de calculer la signature d'une permutation* σ *:*

- ▷ $\varepsilon(\sigma) = (-1)^T$ *où* T *est le nombre de facteurs dans une écriture de* σ *en produit de transpositions ;*
- ▷ $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (-1)^{\ell_i - 1}$ *où* $\ell_1, \ldots, \ell_k$ *sont les longueurs des cycles de longueur au moins* 2 *dans l'écriture de* σ *en produit de cycles disjoints ;*
- ▷ $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-c}$ *où* c *est le nombre de cycles (y compris ceux de longueur* 1*) de l'écriture de* σ *en produit de cycles disjoints ;*
- ▷ $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ *où* p *est le nombre de cycles de longueur paire de l'écriture de* σ *en produit de cycles disjoints ;*
- ▷ $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$ *où* N *est le nombre d'inversions de* σ*, une inversion étant un couple* (i, j) *de* $[\![1, n]\!]$ *tel que* $i < j$ *et* $\sigma(i) > \sigma(j)$.