Systèmes linéaires

1 Sous-espaces affines

1.1 Généralités

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A une partie de E.

On dit que A est un sous-espace affine quand il existe un sous-espace vectoriel F et un vecteur v tel que $A = \{v + x \ / \ x \in F\}$.

On note alors $A = v + F$.

Exemples.

— Tout sous-espace vectoriel est un sous-espace affine : il suffit de prendre $v = 0$.

— Dans $\mathbb{R}^3$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 1\}$ est un sous-espace affine.

— L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire $xy' + y = 4x$ est un sous-espace affine de $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

Proposition 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A un sous-espace affine de E.*

Alors $F = \{x - y \ / \ (x, y) \in A^2\}$ est un sous-espace vectoriel de E et pour tout vecteur $v \in A$, $A = v + F$.

On constate donc que dans la définition de sous-espace affine, le vecteur v n'est pas unique : tout vecteur de A convient, mais en revanche, le sous-espace vectoriel F est parfaitement déterminé par A : on dit que F est la direction de A, on note $F = \mathrm{dir}(A)$.

Remarque. La notion de sous-espaces affines est associée à une double vision des éléments de E : dans la notation $A = v + F$, on considère v comme un point de l'espace E et les éléments de F comme des vecteurs.

Si les vecteurs sont notés avec des flèches comme en géométrie, alors si M, N sont deux points de E, on note $\overrightarrow{MN} = N - M$ ou encore $N = M + \overrightarrow{MN}$.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $v \in E$.

On appelle translation de vecteur v l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & v + x \end{array}$.

Les translations ne sont pas des applications linéaires !

Avec cette définition, un sous-espace affine est l'image d'un sous-espace vectoriel par une translation.

Le cas le plus courant où on rencontre les sous-espaces affines est le suivant.

Proposition 2. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

Pour tout vecteur $y_0 \in F$, l'ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) = y_0\}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E. Dans ce cas, sa direction est le noyau de f.

Un cas particulier : si f est une forme linéaire non nulle, alors pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) = \lambda\}$ est un sous-espace affine, appelé hyperplan affine.

1.2 Intersection de sous-espaces affines

Proposition 3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B deux sous-espaces affines de E.*
Alors $A \cap B$ est soit vide, soit un sous-espace affine dont la direction est $\mathrm{dir}(A) \cap \mathrm{dir}(B)$.

1.3 Parallélisme

Définition. On dit que deux sous-espaces affines d'un espace vectoriel sont parallèles quand ils ont la même direction.

De manière évidente, la relation de parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-espaces affines.

Proposition 4. *Deux sous-espaces affines parallèles sont soit confondus, soit disjoints (on dit alors qu'ils sont strictement parallèles).*

Remarque. On rencontre aussi une autre définition du parallélisme : A est parallèle à B quand $\mathrm{dir}(A) \subset \mathrm{dir}(B)$.
Cette définition est souvent utilisée en géométrie dans l'espace (on peut alors dire qu'une droite est parallèle à un plan), mais elle a le défaut de ne pas être symétrique (par exemple, en géométrie dans l'espace, si deux droites sont parallèles à un plan selon cette définition, il faut se garder d'en conclure qu'elles sont parallèles).

1.4 En dimension finie

On dit aussi que A est un sous-espace affine de dimension p quand $\mathrm{dir}(A)$ est de dimension finie p.
Dans ce cas, si on choisit un point de A, noté Ω, et $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est une base de $\mathrm{dir}(A)$, alors on dit que $\mathscr{R} = (\Omega, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est un repère affine de A :

pour tout point $M \in A$, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e_i}$: les coefficients $x_1, \dots, x_p$ sont appelés les coordonnées du point M dans le repère $\mathscr{R}$.

2 Systèmes linéaires

2.1 Résumé

Si S est un système linéaire à n équations et p inconnues

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

on appelle $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ la matrice du système

on appelle $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des seconds membres

et $C = (A|B) \in \mathscr{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ la matrice complète du système.
Suivant l'interprétation que l'on donne à ce système linéaire, on obtient divers résultats qui découlent de la théorie sur les espaces vectoriels et les applications linéaires.

Proposition 5. *Le système S est compatible si et s. si* $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} A$.

Proposition 6. *Soit S un système linéaire homogène à p inconnues, de matrice A.*
Alors l'ensemble des solutions de S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - \operatorname{rg}(A)$.

De plus, on sait que parmi les inconnues, $\operatorname{rg}(A)$ d'entre elles seront principales et les autres secondaires. La résolution en ne faisant que des opérations sur les lignes impose les inconnues principales ou secondaires (d'après l'unicité de R dans la décomposition ER), mais si on se permet des permutations de colonnes, alors on peut trouver d'autres choix pour ces inconnues. Ce qui ne change pas est le nombre d'inconnues de chaque type.

Proposition 7. *Soit S un système linéaire à p inconnues, de matrice A.*
Alors l'ensemble des solutions de S est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ dimension $p - \operatorname{rg}(A)$.

2.2 Un cas particulier courant

Définition. Un système linéaire est appelé système de Cramer quand il est carré (autant d'équations que d'inconnues) et sa matrice est inversible.

Un système de Cramer a toujours une unique solution. On peut même dire mieux : si pour un certain second membre, un système carré a une unique solution, alors c'est un système de Cramer donc il a toujours une unique solution quel que soit le second membre.

2.3 Retour sur les équations d'un sous-espace vectoriel

Proposition 8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de dimension p. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.*
Alors

- ▹ *il existe un système linéaire homogène de $n - p$ équations (à n inconnues) linéairement indépendantes qui définit le sous-espace F dans la base $\mathscr{B}$ (les inconnues étant les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$) ;*
- ▹ *tout système linéaire homogène à n inconnues (les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$) qui définit F dans la base $\mathscr{B}$ a un rang égal à $n-p$, donc on peut en extraire un sous-système principal de $n - p$ équations linéairement indépendantes.*