Mp2i - Programme de colles 24

Semaine du 11 au 15 avril 2022

1 Reprise des programmes précédents d'algèbre linéaire

2 Calculs matriciels

a) Transposition des matrices (notation officielle A^T), propriétés.
b) Bestiaire des matrices carrés : triangulaire supérieure ou inférieure, diagonale, symétrique, antisymétrique.
c) Matrices équivalentes, lien avec le rang.
d) Matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
e) Opérations par blocs sur les matrices.
f) Opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. Algorithme du pivot de Gauss : toute matrice est équivalente par ligne à une unique matrice échelonnée réduite par lignes. Matrices d'opérations élémentaires, traduction sous forme de produits de matrices de l'algorithme du pivot. Décomposition unique ER d'une matrice (E produit de matrices d'opérations élémentaires, R matrice échelonnée réduite par lignes).
g) Calcul de l'inverse par la méthode de Gauss-Jordan.

3 Compléments d'algèbre linéaire

a) Sous-espaces affines d'un espace vectoriel. Exemple fondamental : si f est linéaire, l'ensemble des solutions d'une équation $f(x) = v$ d'inconnue x est soit vide, soit un sous-espace affine.
b) Équations d'un s.e.v. : tout s.e.v. de dimension p dans un espace de dimension n est défini par un système de $n - p$ équations linéaires homogènes, les inconnues étant les coordonnées dans une base fixée.

4 Groupe symétrique

a) Groupe symétrique S_n.
b) Transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de transposition.
c) Cycles. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
d) Signature d'une permutation : définition, propriétés de morphisme, calcul pratique par nombre d'inversions ou de transpositions dans la décomposition en produit.

Démonstrations à connaître

- si F est un s.e.v. de dimension p dans un espace de dimension n, il est défini par $n-p$ équations dans une base
- algorithme de décomposition d'une permutation en produits de transpositions
- la signature d'une transposition est -1, la signature d'un k-cycle est $(-1)^{k-1}$