APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathscr{B}$ la base canonique de E ; $F = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathscr{C}$ la base canonique de F.

Pour $P \in E$, on définit $f(P) = P' + P(0)\,X + P(-1)\,X^2$.

a) Vérifiez que f est une application linéaire de E dans F.

b) Donnez la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$.

c) Précisez le noyau et l'image de f en donnant une base de chacun d'eux.

d) Pour $k \in [\![0, 3]\!]$, on pose $P_k = (3-k)X^3 + kX^k + k$: montrez que $\mathscr{B}' = (P_0, \dots, P_3)$ est une base de E. Pour $k \in [\![0, 2]\!]$, on pose $Q_k = X^2 + X^k$: montrez que $\mathscr{C}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base de F.

e) Donnez la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}'$, $\mathscr{C}'$.

***2)** Soit $E = \mathrm{vect}(\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$, D l'application qui à une fonction de E associe sa dérivée.

a) Donnez la dimension de E ainsi qu'une base de E

b) Montrez que D est un endomorphisme de E

c) Explicitez la matrice de D dans cette base.

***3)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{B}$ sa base canonique. Vérifiez que l'application f qui à $P \in E$ associe $f(P) = P - P' + P''$ est un endomorphisme de E et donnez sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. f est-il un automorphisme de E ?

***4)** Soit E, F deux $K-$e.v. de dimensions respectives 2,3, munis chacun d'une base $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ resp. Soit f l'application linéaire de E dans F qui a pour matrice dans les bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

a) f est-elle injective ? surjective ?

b) Déterminez les noyau et image de f

c) Soit a, b les vecteurs de E qui ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$, u, v, w les vecteurs de F qui ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{C}$. Montrez que les familles $\mathscr{B}' = (a, b)$, $\mathscr{C}' = (u, v, w)$ sont des bases de E, F respectivement.

d) Déterminez la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}'$, $\mathscr{C}'$.

***5)** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez A^3 en fonction de A. Calculez ensuite A^9 et A^{81}.

***6)** Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculez U^2, V^2, UV et VU.

b) Déterminez U^n et V^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit a, b deux réels et $M = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$. Calculez M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

****7)** On note $I = I_2$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $\mathscr{E} = \{xI + yJ \;/\; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

a) Montrez que $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. et aussi un anneau pour les lois + et .

b) Déterminez son groupe des inversibles.

c) Résolvez les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathscr{E}$:

$$X^2 = I, \quad X^2 = 0, \quad X^2 = X$$

****8)** On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque tous les coefficients de A sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrez que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

****9)** Soit $z = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ et $A = \left(z^{(p-1)(q-1)}\right)_{1 \leqslant p,q \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$.

On note $\overline{A}$ la matrice dont les termes sont les conjugués de ceux de A. Calculez $A.\overline{A}$. Conclusion ?

****10)** Étudiez la structure de l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;/\; (a,b) \in K^2 \right\}$ puis de $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;/\; a \in K \right\}$

(étudier la structure d'un ensemble, c'est déterminer si c'est un groupe, un anneau, un espace vectoriel, un corps, etc).

***11)** Puissances de matrices.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$. A-t-on $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Pourquoi ?

b) Soit $a \in \mathbb{R}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $A = aI_3 + N$. Vérifiez que $N^3 = 0$ et calculez A^n en fonction de n

c) Soit $A = -\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & -1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 puis $(I_3 + A)^n$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{C}$, $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $A = xI_n + J$. Calculez J^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ puis A^p.

***12)** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculez $(A + I_3)^3$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez A^n à l'aide de la formule du binôme.

c) Justifiez que A est inversible et exprimez son inverse en fonction de I_3, A et A^2.

****13)** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -4 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

a) Montrez que f n'est pas injectif et donnez une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

b) Déterminez la dimension de $\mathrm{Im}\, f$, ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}\, f$.

c) Montrez que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

****14)** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 4, muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} 8 & -14 & 37 & -11 \\ 12 & -20 & 52 & -16 \\ 8 & -14 & 37 & -11 \\ 17 & -31 & 83 & -24 \end{pmatrix}$

a) Montrez que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont pas supplémentaires.

b) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$? De $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$? Déterminez une base de ces deux sous-espaces.

c) Déterminez l'ensemble des vecteurs invariants par f.

d) Déterminez une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

****15)** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) f est-elle injective ? surjective ?

b) Déterminez trois vecteurs v_1, v_2, v_2' non nuls tels que $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_2') = 2v_2'$ et v_2, v_2' non colinéaires.

c) Montrez que (v_1, v_2, v_2') est une base de E et donnez la matrice de f dans cette base.

d) Montrez que $f^2 = f \circ f$ est combinaison linéaire de f et Id_E.

e) Soit $C(f)$ le commutant de f, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f. Montrez que $C(f)$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 5.

****16)** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 14 & -5 & -7 \end{pmatrix}$.

a) f est-elle injective ? surjective ?

b) Déterminez trois vecteurs v_1, v_2, v_3 non nuls tels que $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = v_2 + 2v_3$.

c) Montrez que (v_1, v_2, v_3) est une base de E et donnez la matrice de f dans cette base.

d) Montrez que f^3 est combinaison linéaire de Id_E, f et f^2.

e) Montrez que s'il existe une base de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale, alors les coefficients diagonaux de cette matrice ne peuvent être que 1 ou 2.

f) Montrez qu'il n'existe aucune base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

****17)** Soit $a \in \mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}-$e.v. de dimension 2, $b = (e_1, e_2)$ une base de E et f l'endomorphisme de E qui a pour matrice dans la base b :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & 2a \\ 2a & 1 - a^2 \end{pmatrix}$$

a) Montrez qu'il existe deux vecteurs non nuls u_1, u_2 tels que $f(u_1) = (a^2+1)u_1$ et $f(u_2) = -(a^2+1)u_2$.

b) Montrez que la famille (u_1, u_2) est une base de E et donnez la matrice de f dans cette base.
On cherche toutes les matrices (2,2) B telles que $AB = BA$. B étant une telle matrice, on note g l'endomorphisme de E de matrice B dans la base b.

c) Montrez que $f \circ g = g \circ f$. Montrez alors que $g(u_1)$ et u_1 sont colinéaires, ainsi que $g(u_2)$ et u_2.

d) Donnez la forme générale de la matrice de g dans la base (u_1, u_2) et déduisez-en la forme générale de B.

***18)** Soit E un K-e.v. de dimension 2, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, U la droite vectorielle dirigée par $-3e_1 + 2e_2$, V celle dirigée par $2e_1 - e_2$. Montrez que U, V sont supplémentaires et donnez les matrices dans la base $\mathscr{B}$ du projecteur sur U parallèlement à V et de la symétrie par rapport à V parallèlement à U.

***19)** Soit E un K-e.v. de dimension 3, $\mathscr{B}$ une base de E. Montrez que les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathscr{B}$ sont les suivantes sont des projecteurs ou des symétries, dont vous préciserez les éléments caractéristiques :

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

***20)** Soit E un K-e.v. de dimension 3, $\mathscr{B}$ une base de E. Soit u le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans cette base et F le s.e.v. d'équation $x + 2y + z = 0$, $G = \operatorname{vect}(u)$.

a) Montrez que F et G sont supplémentaires.

b) Donnez les 4 matrices dans la base $\mathscr{B}$ des projecteurs et symétries dont les éléments caractéristiques sont F et G.

****21)** Soit E un K-e.v. de dimension 2 muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans cette base.

a) Montrez que f est un projecteur si et seulement si $f = 0$ ou $f = \mathrm{Id}_E$ ou $\big(a + d = 1$ et $ad - bc = 0\big)$.

b) Montrez que f est une symétrie si et seulement si $f = \mathrm{Id}_E$ ou $f = -\mathrm{Id}_E$ ou $\big(a + d = 0$ et $ad - bc = -1\big)$.

****22)** Soit E un K-e.v. de dimension 2, f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

a) Montrez que f n'est ni injectif, ni surjectif. Quelles sont les dimensions du noyau et de l'image de f ?

b) Montrez que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, puis que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$

c) Montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

****23)** Soit E un K-e.v. de dimension 3, f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

Montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

****24)** Soit E un K-e.v. de dimension finie n, $f \in L(E)$. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont n scalaires, on note $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ la matrice carrée $n \times n$ remplie de zéros et dont la diagonale principale est $(a_1, \ldots, a_n)$.

a) Montrez que f est un projecteur si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

b) Montrez que f est une symétrie si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$.

***25)** Étudiez si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculez leurs inverses :

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -8 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

****26)**

a) Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$.
Montrez que $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et calculez M^{-1}.

b) Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $m_{ij} = \begin{cases} \dbinom{j-1}{i-1} & \text{si} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$.
Montrez que $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et calculez M^{-1}.

c) Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$.
Montrez que $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et calculez M^{-1}.

****27)** Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Montrez que A est inversible.

***28)** Soit A une matrice carrée d'ordre n. Montrez que $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et s.si il existe deux matrices-colonnes X, Y telles que $A = X\ Y^T$.

****29)** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(K)$, $AM = MA$. Pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on appelle $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(K)$ remplie de zéros sauf un 1 en position (i,j).

a) Soit $(i,j,k,l) \in \{1,...,n\}^4$, calculez $E_{i,j}.E_{k,l}$.

b) Calculez $A.E_{k,l}$ et $E_{k,l}.A$ pour $(k,l) \in \{1,...,n\}^2$ en fonction des coefficients de A.

c) Justifiez que pour tout $(k,l) \in \{1,...,n\}^2$, $a_{kk} = a_{ll}$ et si $k \neq l$, alors $a_{k,l} = 0$.

d) Concluez : quelles sont les matrices A qui commutent avec toutes les autres ?

***30)** Montrez qu'il n'existe pas de couples de matrices $(A,B) \in \mathscr{M}_n(K)^2$ tels que $AB - BA = I_n$.

***31)** Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(K)$, $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrez que $A = B$.

****32)** Soit f un endomorphisme de E, espace de dimension n, tel que $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{rg}(f) = 1$. Montrez que f est un projecteur.

****33)** Résolvez les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) $X + \mathrm{tr}(X)A = B$ où A, B désignent deux matrices carrées d'ordre n.

b) ${}^tX + X = I_n$.

****34)** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et la matrice écrite en bloc $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ O_n & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

Écrivez $P(B)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme donné sous forme de matrice par blocs.

****35)** Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$.

Démontrez que le rang de M est égal à $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B - A)$.

*****36)** Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = A + B$. Montrez que $AB = BA$.