Matrices et applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices d'une application linéaire

1.1 Généralités

Définition. Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ deux bases de E, F respectivement. On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

On appelle matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ la matrice de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ dans la base $\mathscr{C}$.

Elle est notée $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}\, f$: cette matrice appartient à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

***Exercices* :**

1) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_2[X]$ et f la dérivation. Donnez la matrice de f dans les bases canoniques de E et F.
2) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = E$ et $f : P \mapsto P(X+1) + P(1)X^3$. Donnez la matrice de f dans les bases canoniques de E et F.

On rappelle le résultat suivant (*cf.* chapitre « Applications linéaires »).

Proposition 1. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, tels que E possède une base $(e_1, \ldots, e_p)$. Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de p vecteurs de F.*

Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = v_i$.

Autrement dit, pour définir une application linéaire sur un e.v. muni d'une base, il suffit de la définir sur chacun des vecteurs de la base.

Proposition 2. *Avec les mêmes notations,*

l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}\, f \end{array}$ *est une bijection.*

La matrice d'une application linéaire dans un couple de bases données suffit à déterminer celle-ci parfaitement, autrement dit à toute matrice correspond une et une seule application linéaire relativement au couple de bases choisies.

1.2 Liens entre les opérations sur les matrices et celles sur les app. linéaires

Proposition 3. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement. Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ deux bases de E, F respectivement.*

Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}(f+g) = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}\, f + \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}\, g$
- $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}(\lambda f) = \lambda \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}\, f$

Corollaire 1. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement.*

Les deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes. En particulier, $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie np.

1.3 Écriture matricielle d'une app. linéaire

Définition. Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ deux bases de E, F respectivement. On note $A = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\operatorname{mat}} f$.

Si un vecteur x de E a pour matrice-colonne de coordonnées X dans la base $\mathscr{B}$, alors le vecteur $f(x)$ a pour matrice-colonne de coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ une matrice notée AX, appelée le produit de A et X.

En notant $y = f(x)$ et Y la matrice-colonne des coordonnées de y dans la base $\mathscr{C}$, on a la relation matricielle $Y = AX$: cette relation générale s'appelle l'écriture matricielle de f.

Autrement dit, formellement
$$\underset{\mathscr{C}}{\operatorname{coord}} y = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\operatorname{mat}} f . \underset{\mathscr{B}}{\operatorname{coord}} x$$

Calcul explicite des coefficients de Y en fonction de ceux de A et X...

1.4 Produit matriciel

On en déduit alors la traduction matricielle de la composition d'applications.

Proposition 4. *Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p, n et m respectivement.*
Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ trois bases de E, F, G respectivement.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$: on note $A = (a_{ij}) = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\operatorname{mat}} f$, matrice de $\mathscr{M}_{\ ,\ }(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) = \underset{\mathscr{C},\mathscr{D}}{\operatorname{mat}} g$, matrice de $\mathscr{M}_{\ ,\ }(\mathbb{K})$.
Alors $C = \underset{\mathscr{B},\mathscr{D}}{\operatorname{mat}}(g \circ f)$ est une matrice (c_{ij}) de $\mathscr{M}_{\ ,\ }(\mathbb{K})$ telle que
$$\forall (i, j) \in [\![1,\ ]\!] \times [\![1,\ ]\!] \quad c_{ij} =$$

La matrice C ainsi définie est appelée produit des matrices B et A : on note donc
$$\underset{\mathscr{B},\mathscr{D}}{\operatorname{mat}}(g \circ f) = \underset{\mathscr{C},\mathscr{D}}{\operatorname{mat}} g \cdot \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\operatorname{mat}} f$$

On définit ainsi un produit entre matrices de tailles compatibles : on ne peut multiplier une matrice de taille (ℓ, m) avec une matrice de taille (n, p) que si

et dans ce cas, on obtient une matrice de taille (,).

Proposition 5. *Soit A, B, C des matrices. Quand les produits suivants existent, alors*
- ▷ *$A(BC) = (AB)C$: le produit matriciel est associatif*
- ▷ *$A(B + C) = AB + AC$: le produit matriciel est distributif à droite pour l'addition*
- ▷ *$(A + B)C = AC + BC$: le produit matriciel est distributif à gauche pour l'addition*

En revanche, le produit matriciel n'est pas commutatif.

1.5 Cas particuliers des endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

On appelle matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ la matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}$.

Elle est plutôt notée $\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}} f$: cette matrice appartient à $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Tous les résultats précédents restent valables. Mais on en a d'autres spécifiques aux matrices carrées.

Définition. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle matrice-identité d'ordre p la matrice carrée

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$$

Bien évidemment, les matrices-identités sont les matrices des endomorphismes identités dans toute base.

Proposition 6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.*

- $I_p = \underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}} \operatorname{Id}_E$
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}}(f^n) = (\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}} f)^n$*

On a donc

Proposition 7. *Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A\, I_p = A$ et $I_n\, A = A$.*

On peut donc expliciter la structure algébrique de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Proposition 8. *$\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est un anneau pour les opérations usuelles sur les matrices.*
Cet anneau n'est pas commutatif et n'est pas intègre (il possède des diviseurs de zéros).

Remarque. Comme dans tous les anneaux, on dit que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ commutent quand $AB = BA$.
On rappelle que la condition $AB = BA$ est indispensable pour utiliser la formule du binôme ou la formule de Bernoulli dans l'anneau $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

1.6 Polynômes de matrices

Comme pour les endomorphismes, on peut parler de polynômes de matrices.

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(A)$ la matrice $\sum_{i=0}^{n} a_i A^i$.

Les opérations sur les polynômes sont compatibles avec celles sur les matrices.

Proposition 9. *Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

- $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$
- $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$
- $(PQ)(A) = P(A)\, Q(A)$.

2 Rang d'une matrice

2.1 Définition

Étant donnée une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle vecteurs-colonnes de A les colonnes de A vues comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Définition. On appelle rang d'une matrice le rang de ses vecteurs-colonnes.

Le rang d'une matrice peut donc se calculer grâce à la méthode du pivot de Gauss.

2.2 Liens entre les différentes notions de rang

On a vu jusqu'ici 3 notions de rang : rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire, rang d'une matrice.
En fait, ces notions coïncident.

Proposition 10.

- ▷ *Soit E un $\mathbb{K}$.e.v. de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E, $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.*
  Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(v_1, \dots, v_n)$.
- ▷ *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies p et n respectivement. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*
  Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ deux bases de E, F respectivement. On note A la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$.
  Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathscr{B})$ où la notation abusive $f(\mathscr{B})$ désigne la famille constituée des images par f des vecteurs de $\mathscr{B}$.

Le rang d'une application linéaire peut donc être calculé grâce à toute matrice qui la représente. Une conséquence donc de cela est que toutes les matrices qui représentent la même application linéaire dans des couples de bases différentes ont le même rang.

2.3 Reformulations

D'abord, on résume les liens entre les propriétés éventuelles d'une famille de vecteurs et le rang.

Proposition 11. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est notée A.*
Alors

- ▷ *la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille libre si et seulement si $\operatorname{rg} A = p$;*
- ▷ *la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille génératrice de E si et seulement si $\operatorname{rg} A = n$;*
- ▷ *la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{rg} A = n = p$ (ce qui implique que A soit carrée).*

Ensuite, on fait de même avec les applications linéaires.

Proposition 12. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension p, n resp., $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ deux bases de E, F resp. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $A = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\operatorname{mat}} f$.*
Alors

- ▷ *f est injective si et seulement si $\operatorname{rg} A = p$;*
- ▷ *f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} A = n$;*
- ▷ *f est un isomorphisme si et seulement si $\operatorname{rg} A = n = p$ (ce qui implique que A soit carrée).*

3 Matrices inversibles

3.1 Généralités

Définition. Une matrice A est dite inversible quand il existe une matrice B telle que AB et BA soient deux matrices-identités.

Une conséquence évidente de la définition est qu'une matrice inversible est carrée. On peut donc encore caractériser les matrices inversibles de la façon suivante.

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est inversible quand il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Autrement dit, une matrice inversible est un élément inversible d'un anneau de matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
L'ensemble des matrices inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. C'est donc un groupe pour la multiplication des matrices.

3.2 Lien avec les automorphismes

Proposition 13. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie p. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.*
Alors f est un automorphisme de E si et seulement si $\operatorname*{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice inversible.
Dans ce cas, $\operatorname*{mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \operatorname*{mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$

On dispose de tout un tas de moyens de vérifier qu'une matrice est inversible ou qu'un endomorphisme est un automorphisme.

Théorème 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie p, $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ une base de E et A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.*
Toutes les propositions suivantes sont équivalentes :

- ▷ *f est un automorphisme*
- ▷ *A est inversible*
- ▷ $\operatorname{rg} f = p$
- ▷ $\operatorname{rg} A = p$
- ▷ *f est injective*
- ▷ *l'équation $AX = 0$ d'inconnue X une matrice-colonne a pour seule solution $X = 0$*
- ▷ *A est inversible à gauche : il existe $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_p$*
- ▷ *f est surjective*
- ▷ *pour toute matrice-colonne Y, l'équation $AX = Y$ a au moins une solution*
- ▷ *A est inversible à droite : il existe $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_p$*
- ▷ *l'image par f de la base $\mathscr{B}$ est une base de E*

4 Changements de bases

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ deux bases de E, F respectivement, qu'on appelle traditionnellement « anciennes bases ».
Soit $\mathscr{B}'$, $\mathscr{C}'$ deux bases de E, F respectivement, qu'on appelle traditionnellement « nouvelles bases ».
On suppose connaître la matrice A de f dans les bases $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ et on veut connaître celle A' dans les base $\mathscr{B}', \mathscr{C}'$.

4.1 Effet sur les coordonnées d'un vecteur

Définition. On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice carrée $P = \operatorname*{mat}_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'$: elle contient en colonnes les coordonnées des nouveaux vecteurs en fonction des anciens.
Elle est parfois notée $P = \operatorname{mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')$.

Proposition 14. *Avec ces notations, on a :*

- ▷ *P est inversible*
- ▷ *P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$*

De plus, si un vecteur x de E a pour matrices de coordonnées X dans la base $\mathscr{B}$ et X' dans la base $\mathscr{B}'$, alors $X = P\,X'$

Autrement dit, formellement,

$$\operatorname*{coord}_{\mathscr{B}} x = \operatorname{mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}') \cdot \operatorname*{coord}_{\mathscr{B}'} x$$

4.2 Effet sur la matrice d'un app. linéaire

Proposition 15. *Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}'$. Alors $A' = Q^{-1}\, A\, P$*

4.3 Effet sur la matrice d'un endomorphisme

Dans le cas des endomorphismes, on choisit $\mathscr{C} = \mathscr{B}$ et $\mathscr{C}' = \mathscr{B}'$.

Proposition 16. *Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On a alors $Q = P$. La relation précédente devient $A' = P^{-1}\, A\, P$*

On voit que dans ces formules, la principale difficulté est de calculer l'inverse d'une matrice. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

Remarque. On voit qu'il existe des liens de profonde similarité entre matrices et applications linéaires.

Si A est une matrice (quelconque),

- on appelle $\operatorname{Ker} A$ l'ensemble des matrices-colonnes X telles que $AX = 0$
- on appelle $\operatorname{Im} A$ l'ensemble des matrices-colonnes de la forme AX

En fait, l'application $X \mapsto AX$ est linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, son noyau et son image sont les deux espaces décrits ci-dessus.