Calcul matriciel

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Transposition

Définition. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes, notée A^T.
Autrement dit, si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $A^T = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, $b_{i,j} = a_{j,i}$.

L'application de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ qui associe à une matrice sa transposée est appelée transposition.

Proposition 1. *Les transpositions sont des applications linéaires.*
De plus,

- ▷ *pour tout* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^T)^T =$
- ▷ *pour tout couple* $(A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\quad (AB)^T =$
- ▷ *pour tout* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N}$, $\quad (A^k)^T =$
- ▷ *pour tout* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, *la matrice* A^T *est inversible et* $(A^{-1})^T =$

2 Bestiaire des matrices carrées

Dans toute cette section, les matrices sont carrées et appartiennent à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Elles sont notés avec des lettres majuscules A, B, ... et leurs coefficients sont notés avec la lettre minuscule correspondante $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, ...
La diagonale d'une telle matrice est la diagonale dite principale, qui vaut du haut à gauche vers le bas à droite (l'autre diagonale est rarement mise en valeur, dans ce cas on l'appelle diagonale non principale).

2.1 Matrices triangulaires

Définition. A est dite triangulaire supérieure quand ses coefficients strictement au-dessous de la diagonale sont nuls :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

A est dite triangulaire inférieure quand ses coefficients strictement au-dessus de la diagonale sont nuls :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

On note souvent $\mathscr{T}_n^s(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, $\mathscr{T}_n^i(\mathbb{K})$ celui des matrices triangulaires inférieures.

Il est évident que la transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une triangulaire inférieure et réciproquement.

Proposition 2. *Les deux ensembles* $\mathscr{T}_n^s(\mathbb{K})$ *et* $\mathscr{T}_n^i(\mathbb{K})$ *sont des s.e.v. de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*, qui sont de plus stables par multiplication. Ils sont la même dimension :*
Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, dans ce cas son inverse est une matrice triangulaire de même type.

Quand une matrice triangulaire A est inversible, la diagonale de A^{-1} est constituée des inverses des éléments diagonaux de A. Mais c'est tout ce qu'on peut dire *a priori*. Les autres éléments non diagonaux ne se calculent pas si simplement.

2.2 Matrices diagonales

Définition. A est dite diagonale quand ses coefficients non diagonaux sont nuls :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

On note souvent $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales.

Il est évident que $\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{T}_n^s(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}_n^i(\mathbb{K})$, donc $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est un s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Les opérations entre matrices diagonales sont très faciles à effectuer, d'où leur intérêt en algèbre linéaire.

2.3 Matrices symétriques, antisymétriques

Définition. A est dite symétrique quand ses coefficients symétriques par rapport à la diagonale sont égaux :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

A est dite antisymétrique quand ses coefficients symétriques par rapport à la diagonale sont opposés :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

On note souvent $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques.

En particulier, la diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle.

À l'aide de la transposition, il est facile de caractériser de telles matrices.

Proposition 3.
A est symétrique si et seulement si $A^T =$
A est antisymétrique si et seulement si $A^T =$

Proposition 4. *Les ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ils sont supplémentaires et* $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) =$, $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) =$

Remarque. Ces deux ensembles ne sont pas stables par multiplication. Cependant, si une matrice A est symétrique et inversible, alors son inverse est aussi symétrique. Et de même pour les matrices antisymétriques.

3 Matrices équivalentes

3.1 Généralités

Définition. Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont équivalentes quand il existe deux matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

Dans ce cas, on note $A \sim B$.

Comme son nom l'indique…

Proposition 5. *La relation $\sim$ entre matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.*

En fait, cette relation est une relation assez faible entre les matrices, comme on va le voir ci-dessous.

D'après la formule de changement de bases, on a immédiatement le résultat suivant.

Proposition 6. *Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et s.si elles représentent une même application linéaire dans des couples de bases différents.*

3.2 Rang et équivalence

Définition. Soit n, p, r trois entiers naturels tels que n et p soient non nuls et $0 \leqslant r \leqslant \min(n, p)$.
On note souvent $J_{n,p,r}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui contient en haut à gauche la matrice I_r.

Proposition 7. *Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r son rang. Alors $A \sim J_{n,p,r}$.*

Ce résultat donne une caractérisation beaucoup plus simple de l'équivalence entre matrices.

Proposition 8. *Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

3.3 Rang et transposée

Proposition 9. *Pour toute matrice A, on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.*

Comme le rang d'une matrice se calcule a priori par opérations sur les colonnes, ce résultat prouve que le rang peut également se calculer par opérations sur les lignes.

Une conséquence de cette propriété est qu'on peut parfois connaître le rang en ne considérant qu'une partie de la matrice.

Définition. Une matrice A est dite extraite d'une matrice B quand A est obtenue en supprimant des lignes et/ou des colonnes de B.

Proposition 10. *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
Toute matrice extraite de A est de rang inférieur ou égal à celui de A.
Le rang de A est la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Par exemple, si $p < n$ et s'il existe une matrice carrée inversible de taille p extraite de A, alors le rang de A est p.

4 Matrices semblables

4.1 Généralités

Définition. Soit A, B deux matrices carrées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A et B sont semblables quand il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 11. *La relation de similitude entre matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.*

À l'inverse de la relation d'équivalence entre matrices rectangulaires, la relation de similitude est une relation beaucoup plus contraignante. Être semblables signifie partager beaucoup plus de caractéristiques que d'être équivalentes.

D'après la formule de changement de bases, on a immédiatement le résultat suivant.

Proposition 12. *Deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ sont semblables si et s.si elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes.*

Il n'existe pas de caractérisation simple de la similitude entre deux matrices carrées : savoir si deux matrices sont semblables est un problème difficile.

Évidemment, il y a un rapport simple entre équivalence et similitude.

Proposition 13. *Si deux matrices carrées sont semblables, alors elles sont équivalentes.*

Mais la réciproque est fausse.

Corollaire 1. *Deux matrices semblables ont le même rang.*

Mais avoir le même rang est loin d'être suffisant pour être semblables.

4.2 Trace d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

L'application trace vérifie de remarquables propriétés.

Proposition 14.

- ▷ *La trace est une forme linéaire sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- ▷ *Pour tout couple* $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Corollaire 2. *Deux matrices semblables ont la même trace.*

Mais la réciproque est fausse.

***Exercices* :**

1) Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Même question avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.3 Trace d'un endomorphisme

Proposition 15. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$.*

Toutes les matrices carrées représentant f ont la même trace. Cette trace ne dépend donc pas du choix de la base dans laquelle on écrit la matrice de f, elle ne dépend que de f : on l'appelle la trace de f, notée $\operatorname{tr}(f)$.

On peut alors reformuler les résultats sur la trace d'une matrice.

Proposition 16.

- ▷ *La trace est une forme linéaire sur* $\mathscr{L}(E)$.
- ▷ *Pour tout couple* $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

5 Opérations par blocs

5.1 Cas général

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. On fixe deux entiers k, ℓ tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant p-1$.
À toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on associe quatre matrices obtenues en découpant la matrice en blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant \ell}}$, $B = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ \ell+1 \leqslant j \leqslant p}}$, $C = (m_{i,j})_{\substack{k+1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant \ell}}$ et $D = (m_{i,j})_{\substack{k+1 \leqslant i \leqslant n \\ \ell+1 \leqslant j \leqslant p}}$.
Cette décomposition par blocs permet de faire des calculs formellement comme s'il s'agissait de nombres.

Proposition 17. *Soit* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *et* $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ *deux matrices de même taille décomposées de la même façon en blocs.*
Alors $M + M' = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$, $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda A & \lambda B \\ \lambda C & \lambda D \end{pmatrix}$.

Proposition 18. *Soit* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *et* $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ *deux matrices telles que le produit* MM' *existe et décomposées en blocs.*
Alors sous réserve que les blocs soient de tailles compatibles pour la multiplication, on a
$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$

Remarque.
- Comme les symboles mis en jeu ne sont pas des nombres mais des matrices, il est indispensable de respecter l'ordre dans les produits.
- On peut généraliser à un quelconque nombre de blocs, pas forcément deux en ligne ou en colonne.

5.2 Cas particuliers des matrices carrées

Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors avec les mêmes notations, en général, on choisit A et D carrées elles aussi. Dans ce paragraphe, on suppose que c'est le cas.

Définition. Avec les mêmes notations, on dit que M triangulaire par blocs quand B ou C est nul. On dit que M est diagonale par blocs quand $B = C = 0$.

Les résultats sur les matrices triangulaires ou diagonales restent valables par blocs : la somme, le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs de même taille l'est encore, et de même pour les matrices diagonales par blocs.
En particulier, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible si et s.si A et D le sont et dans ce cas, l'inverse de M est de la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & B' \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$.

Remarque. La même remarque s'applique : les résultats précédents se généralisent sans difficulté (par récurrence) à un nombre quelconque de blocs diagonaux.

6 Opérations élémentaires sur les matrices

Les opérations dites élémentaires sur les lignes sont les opérations de la forme
$L_i \leftrightarrow L_j$, $\quad L_i \leftarrow \lambda L_i$ (où $\lambda \neq 0$) et $\quad L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ (où $i \neq j$).
On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes.

6.1 Matrices élémentaires

On se place dans une situation où on effectue des opérations élémentaires sur une matrice comportant n lignes.
À chaque opération élémentaire sur les lignes, on associe une matrice, appelée matrice d'opération élémentaire, obtenue de la manière suivante :
- On part de la matrice I_n (carrée de taille n) ;
- On lui applique l'opération en question.

Les matrices d'opérations élémentaires sont réparties en trois familles :
- Les matrices de transposition sont les matrices associées aux opérations $L_i \leftrightarrow L_j$;
- Les matrices de dilatation sont les matrices associées aux opérations $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- Les matrices de transvection sont les matrices associées aux opérations $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Proposition 19. *Appliquer une opération élémentaire sur les lignes à la matrice A revient à multiplier la matrice A à gauche par la matrice d'opération élémentaire associée à l'opération.*

De même, appliquer une opération élémentaire sur les colonnes revient à multiplier à droite par la matrice d'opération élémentaire associée.

6.2 Décomposition ER

Définition. On dit qu'une matrice M est échelonnée (par lignes) si elle satisfait aux conditions suivantes :
- Si l'une de ses lignes est nulle, toutes les lignes suivantes le sont également ;
- À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Dans une matrice échelonnée, on appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Exemple. La matrice suivante est échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition. On dit qu'une matrice R est échelonnée réduite (par lignes) si :
- La matrice R est échelonnée ;
- Tous ses pivots sont égaux à 1 ;
- Les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Exemple. La matrice A suivante est échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss présenté en septembre, c'est transformer la matrice d'abord en une **matrice échelonnée**, puis en une **matrice échelonnée réduite.** Cet algorithme n'agit que sur les lignes de la matrice sans changer le rang.

Définition. On dit que deux matrices de même taille sont équivalentes par lignes lorsqu'on peut transformer l'une en l'autre par opérations élémentaires sur les lignes exclusivement. On définit de même la notion de matrices équivalentes par colonnes.

Cela conduit au théorème suivant :

Théorème 1. *Toute matrice A est équivalente par lignes à une matrice échelonnée réduite R. Cette matrice R est unique.*

L'existence de R provient du fait que l'on peut toujours mener l'algorithme du pivot de Gauss à son terme et aboutir à une matrice échelonnée réduite. Cette matrice est équivalente à la matrice de départ puisqu'on n'a effectué que des opérations élémentaires sur les lignes. L'unicité de R, plus délicate à établir, est admise (voir document annexe).

Ce résultat combiné avec celui sur les produits par des matrices d'opérations élémentaires conduit au théorème de décomposition ER.

Théorème 2 (Décomposition ER des matrices).
Soit A une matrice quelconque.
Il existe une matrice E, produit de matrices d'opérations élémentaires, et une unique matrice R, échelonnée réduite, telles que $A = ER$.

Exercices :

3) Déterminer la décomposition ER de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Par transposition, on en déduit un théorème similaire de décomposition RE des matrices en effectuant des opérations sur les colonnes exclusivement.

6.3 Inversion par la méthode de Gauss-Jordan

Proposition 20. *Toutes les matrices élémentaires sont inversibles. En outre, l'inverse d'une matrice d'opération élémentaire est la matrice d'opération élémentaire associée à l'opération élémentaire réciproque.*

Exemple. Ainsi, par exemple, $E_{L_i \leftarrow 3L_i}$ est inversible et $E^{-1}_{L_i \leftarrow 3L_i} = E_{L_i \leftarrow \frac{1}{3}L_i}$.
Pour savoir si une matrice est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse, on peut procéder par la méthode du pivot de Gauss-Jordan (sur les lignes) :
- On part de la matrice $(A \mid I_n)$ obtenue en augmentant la matrice A de la matrice identité.
- Par la méthode du pivot de Gauss-Jordan, on réduit la matrice A (partie gauche de la matrice augmentée).
- Si on arrive à $(I_n \mid A')$, alors A est inversible et $A^{-1} = A'$.
  Si on arrive à $(R \mid A')$ et que $R \neq I_n$, alors A n'est pas inversible.

Proposition 21. *L'algorithme précédent est correct.*

Exercices :

4) Montrez que $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer N^{-1}.

5) Pour quelles valeurs de x la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculez son inverse dans ce cas.

Remarque. Il existe bien sûr une version « colonne » de l'algorithme d'inversion de Gauss-Jordan.

Ce qui est capital dans ces deux algorithmes est que les opérations élémentaires se font exclusivement sur les lignes ou les colonnes, mais surtout pas un peu des deux !