Mp2i - Programme de colles 23

Semaine du 4 au 8 avril 2022

1 Espaces vectoriels de dimension finie sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

a) Définition d'un e.v. de dimension finie. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. Dans un e.v. ayant une base de n vecteurs, toute famille libre a moins de n vecteurs et est une base si et seulement si elle a exactement n vecteurs. Définition de la dimension d'un e.v. Théorème de la base incomplète.

b) Dimension d'un s.e.v., rang d'une famille de vecteurs, méthode du pivot de Gauss sur les colonnes, famille principale extraite.

c) Familles génératrices d'un e.v., de toute famille génératrice, on peut extraire une base.

d) Somme de deux s.e.v., somme directe, s.e.v. supplémentaires, existence de supplémentaire, dimension d'une somme de deux s.e.v. (th. de Grassmann), caractérisation de la supplémentarité de deux s.e.v. (th « 3 pour le prix de 2 »).

e) Théorème du rang.

f) Formes linéaires et hyperplans.

g) App. linéaires en dimension finie : toute application linéaire est déterminée par la connaissance des images des vecteurs d'une base, matrice d'une application linéaire, expression matricielle d'une application linéaire, calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur.

h) Opérations sur les app. linéaires et lien avec celles sur les matrices.

i) Rang d'une matrice, lien avec les deux autres notions de rang (rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire).

j) Matrices inversibles, diverses caractérisations.

k) Changement de bases : effet sur les coordonnées d'un vecteur, effet sur la matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

2 Calculs matriciels

a) Transposition des matrices (notation officielle A^T), propriétés.

b) Bestiaire des matrices carrés : triangulaire supérieure ou inférieure, diagonale, symétrique, antisymétrique.

c) Matrices équivalentes, lien avec le rang.

d) Matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

Démonstrations à connaître

- si A, B sont deux matrices carrées de $\mathscr{M}_n(K)$ telles que $AB = I_n$, alors A est inversible et B est son inverse ; même chose si on suppose $BA = I_n$
- formule de changement de bases : effet sur les coordonnées d'un vecteur
- les s.e.v. $\mathscr{S}_n(K)$ et $\mathscr{A}_n(K)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(K)$