L'usage des calculatrices est autorisé.

Rappelez-vous tout ce qui a été dit lors de la correction des DS précédents ! N'oubliez pas que le concepteur du sujet est votre ami, mais pas le correcteur ! Lisez donc l'énoncé attentivement, vérifiez la cohérence de vos résultats à l'aide de l'énoncé et rédigez soigneusement sans vouloir tout faire et sans étourderie.

Problème 1 - Polynômes

La fonction signe est définie de la façon suivante sur $\mathbb{R}$: si $x > 0$, alors $\operatorname{sgn} x = 1$; si $x < 0$, alors $\operatorname{sgn} x = -1$ et $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

On définit une suite de polynômes par récurrence : $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n' - 2XP_n$. On pose $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Question 1) Calculez P_1, P_2, P_3 et P_4. Déterminez les racines de chacun de ces quatre polynômes.

Question 2) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$.

Question 3) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$. Pour $n \geqslant 1$, quelles sont les limites de P_n en $-\infty$ et $+\infty$?

Question 4) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Question 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant n fois l'égalité $f'(x) = -2xf(x)$ (sous-entendu pour tout x réel), montrez que $P_{n+1} = -2XP_n - 2nP_{n-1}$.

Question 6)

a) Calculez $P_n(0)$ en fonction de n, si possible à l'aide de deux factorielles : vous pourrez distinguer les cas n pair ou n impair.

b) Justifiez que quand 0 est racine de P_n, alors il est racine simple.

Question 7) Donnez une relation entre P_n' et P_{n-1}. Montrez que les racines de P_n sont simples.

Question 8) On veut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède exactement n racines simples réelles. Il est évident que cette proposition est vraie quand $n = 1$.

On suppose que P_{n-1} possède $n-1$ racines réelles simples $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$.

a) D'abord un lemme : soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ayant une racine réelle simple a ; justifiez que $Q(x) \underset{x \to a}{\sim} Q'(a)(x-a)$.

Selon le signe de $Q'(a)$, quel est le signe de $Q(x)$ quand x est au voisinage à gauche de a à gauche ou à droite de a ?

b) Justifiez que sur chaque intervalle $]-\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[$, …, $]a_{n-1}, +\infty[$, la fonction $x \mapsto P_{n-1}(x)$ est de signe constant. Puis justifiez le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		a_1		a_2		a_3		$\ldots$		a_{n-1}		$+\infty$
$P_{n-1}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\ldots$	$(-1)^{n-2}$	0	$(-1)^{n-1}$	

Déduisez-en entre autres que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\operatorname{sgn} P_n(a_i) = \operatorname{sgn} P_{n-1}'(a_i) = (-1)^i$.

c) Donnez alors le tableau de variations de P_n et montrez que P_n possède n racines réelles distinctes.

Problème 2 - Puissances d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, a, b deux complexes tels que $b \neq 0$, $a^2 + 4b \neq 0$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = a\,f + b\,\mathrm{Id}$ où Id désigne bien sûr l'application identité de E.

Question 1) On pose $\mathscr{A} = \operatorname{vect}(f, \mathrm{Id})$, sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Montrez que $\mathscr{A}$ est un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$.

Question 2)

a) Justifiez l'existence de deux complexes distincts α et β tels que $\begin{cases} a &= \alpha + \beta \\ -b &= \alpha.\beta \end{cases}$.

b) Montrez alors : $(f - \alpha\,\mathrm{Id}) \circ (f - \beta\,\mathrm{Id}) = 0$.

Question 3) On pose $A = \{x \in E \ / \ f(x) = \alpha\,x\}$ et $B = \{x \in E \ / \ f(x) = \beta\,x\}$.

a) Montrez que A et B sont deux s.e.v. de E.

b) Montrez que A et B sont en somme directe.

Question 4) Montrez que $\mathrm{Im}(f-\beta\,\mathrm{Id}) \subset A$ et $\mathrm{Im}(f-\alpha\,\mathrm{Id}) \subset B$.

Question 5) On veut montrer que A et B sont supplémentaires dans E, autrement dit que pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique couple $(u,v) \in A \times B$ tel que $x = u+v$.

a) Montrez que si u et v existent, alors $u = \dfrac{1}{\alpha-\beta}(f(x)-\beta x)$ et donnez de même l'expression de v en fonction de x.

b) Vérifiez que les deux expressions de u et v ci-dessus sont effectivement des solutions. Quel type de démonstration venez-vous de mener ?

Question 6) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $x \in E$. On décompose x sous la forme $u+v$ où $(u,v) \in A \times B$. Exprimez $f^n(x)$ à l'aide de α^n, β^n, u et v.

b) Montrez que f^n peut s'écrire comme combinaison linéaire de f et Id.

Question 7) Justifiez que f est inversible et montrez que la relation précédente est encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

Problème 3 - Translatées d'une fonction

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour $f \in E$ et $t \in \mathbb{R}$, on appelle translatée de f par t l'application $f_t : x \mapsto f(x+t)$. Ainsi $f_0 = f$.

Soit $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de type n si et seulement si il existe $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, f_t est combinaison linéaire de $f_{t_1}, ..., f_{t_n}$. Par convention, on dit que l'application nulle est de type 0.

Il est évident que l'entier n dans la définition précédente n'est pas unique : si n convient, alors tout entier $p \geqslant n$ convient aussi. Alors on dit que f est exactement de type n quand elle est de type n, mais pas de type $n-1$, autrement dit quand l'entier n intervenant dans la définition précédente est minimal.

On dit que f est de type fini si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f est de type n

Partie 1 - Généralités

Question 1) Exemples :

a) Montrez que la fonction exp est de type 1.

b) Montrez que cos est exactement de type 2.

Question 2) Soit $f \in E$ et $n \geqslant 1$.

Montrez que si f est exactement de type n, alors toute famille $(f_{t_1}, ..., f_{t_n})$ qui convient dans la définition est libre.

Question 3) Soit $f \in E$, $f \neq 0$. On suppose qu'il existe un s.e.v. F de E, de dimension finie p, tel que toutes les translatées de f appartiennent à F : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_t \in F$.

a) Montrez que toute famille d'au moins $p+1$ translatées de f est liée.

b) Soit n le plus grand entier pour lequel il existe $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille $(f_{t_1}, ..., f_{t_n})$ soit libre. Justifiez l'existence de cet entier n et justifiez que $n \leqslant p$.

c) Soit n l'entier défini dans la question précédente et $(f_{t_1}, ..., f_{t_n})$ une famille libre. Montrez que f est de type n et que la famille $(f_{t_1}, ..., f_{t_n})$ convient dans la définition.

Question 4) Soit $f \in E$. Montrez l'équivalence : f est de type fini si et seulement si il existe un s.e.v. F de E, de dimension finie, tel que toutes les translatées de f appartiennent à F.

Question 5) Soit TF l'ensemble des applications f de type fini. Montrez que TF est un s.e.v. de E.

Partie 2 - Recherche des applications dérivables exactement de type 1

Soit $f \in E$. On suppose que f est exactement de type 1 (donc $f \neq 0$), et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Question 1)

a) Montrez que toutes les translatées de f sont colinéaires à f.

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Montrez que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+t) = \dfrac{f(x_0+t)}{f(x_0)} f(x)$.

Question 2) En dérivant la relation précédente par rapport à t, puis en donnant une valeur particulière à t, montrez que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants.

Question 3) Concluez : précisez toutes les applications dérivables sur $\mathbb{R}$ et de type 1.

Partie 3 - Recherche des applications dérivables exactement de type 2

Question 1) Soit $(h,k) \in E^2$. Montrez l'équivalence : la famille (h,k) est libre si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{vmatrix} h(a) & k(a) \\ h(b) & k(b) \end{vmatrix} \neq 0$.(on pourra choisir d'abord a puis ensuite b).

On suppose dans toute la suite que f est exactement de type 2 et que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit (f_{t_1}, f_{t_2}) une famille qui convient dans la définition de « f est de type 2 ».

Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe deux scalaires α et β tels que $f_t = \alpha f_{t_1} + \beta f_{t_2}$: ces deux scalaires dépendent de t, on va donc plutôt les noter $g(t)$ et $h(t)$. De cette façon, on définit ainsi deux fonctions g et h.

On a donc : pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+t) = g(t)f_{t_1}(x) + h(t)f_{t_2}(x) \quad (*)$

Question 2)

a) Montrez qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{vmatrix} f_{t_1}(a) & f_{t_2}(a) \\ f_{t_1}(b) & f_{t_2}(b) \end{vmatrix} \neq 0$.

b) Calculez alors $g(t)$ et $h(t)$ en fonction de $f(a+t)$, $f(b+t)$ et du déterminant précédent. Justifiez que g et h sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Question 3)

a) En dérivant une, puis deux fois par rapport à t la relation (*), montrez que f, f', f'' appartiennent à un même s.e.v. de dimension 2.

b) Montrez que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

Question 4) Concluez : précisez les différentes formes possibles des applications deux fois dérivables et de type 2.

Problème 1

Question 1) $P_1 = -2X$, $P_2 = 4X^2 - 2$, $P_3 = -8X^3 + 12X$, $P_4 = 16X^4 - 48X^2 + 12$.

P_1 a pour racine 0, P_2 a pour racines $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, P_3 a pour racines 0, $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, P_4 a pour racines $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}}$, $-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}}$, $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}}$ et $-\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}}$.

Question 2) On pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat : « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ ».

Par convention, $f^{(0)}(x) = f(x) = P_0(x)f(x)$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{d}{dx}\Big(P_n(x)f(x)\Big) = P_n'(x)f(x) + P_n(x)f'(x) = P_n'(x)f(x) + P_n(x) \times (-2x)f(x) = (P_n'(x) - 2xP_n(x))f(x) = P_{n+1}(x)f(x)$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 3) On pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat : « P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$ ».

$P_0 = 1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\deg P_n' = n - 1 < \deg(-2XP_n) = n + 1$ donc $\deg P_{n+1} = \max(\deg P_n', \deg(-2XP_n)) = n + 1$ et $\mathrm{dom}(P_{n+1}) = -2\,\mathrm{dom}(P_n) = -2 \times (-2)^n = (-2)^{n+1}$, donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} P_n(x) = (-1)^n(-\infty)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = (-1)^n(+\infty)^n = (-1)^n\infty$.

Question 4) On pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat : « $P_n(-X) = (-1)^nP_n(X)$ ».

$P_0 = 1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $P_{n+1}(-X) = P_n'(-X) - 2(-X)P_n(-X)$,

or $P_n(-X) = (-1)^nP_n(X)$ donc $-P_n'(-X) = (-1)^nP_n'(X)$ donc $P_n'(-X) = (-1)^{n+1}P_n'(X)$,

donc il vient $P_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1}P_n'(X) - 2(-X)(-1)^nP_n(X) = (-1)^{n+1}P_n'(X) - 2X(-1)^{n+1}P_n(X) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(X)$, donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 5) On utilise la formule de Leibniz : $f^{(n+1)}(x) = (f')^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(-2x)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(f(x))$

$= \dbinom{n}{0}(-2x)f^{(n)}(x) + \dbinom{n}{1}(-2)f^{(n-1)}(x) = -2x\,f^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$

donc $P_{n+1}(x)f(x) = -2x\,P_n(x)f(x) - 2nP_{n-1}(x)f(x)$ et comme $f(x) \neq 0$, on a $P_{n+1}(x) = -2x\,P_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$

Les deux polynômes P_{n+1} et $-2XP_n - 2nP_{n-1}$ coïncident sur une infinité de valeurs, donc ils sont égaux :

$P_{n+1} = -2XP_n - 2nP_{n-1}$.

Question 6)

a) Quand n est impair, $P_n(-X) = -P_n(X)$ donc en particulier, $P_n(0) = -P_n(0)$ donc $P_n(0) = 0$.
Quand n est pair et $n \geqslant 2$, on note $n = 2m$, alors en évaluant la relation précédente (en remplaçant $n+1$ par $2m$), $P_{2m}(0) = -2(2m-1)P_{2m-2}(0)$.
On montre alors facilement par récurrence que
$P_{2m}(0) = (-2)(2m-1) \times (-2)(2m-3) \times \ldots \times (-2)1 = (-2)^m(2m-1)(2m-3)\ldots1$
$= (-2)^m \dfrac{(2m)!}{(2m)(2m-2)\ldots2} = (-2)^m \dfrac{(2m)!}{2^m\,m!} = (-1)^m \dfrac{(2m)!}{m!}$.

b) Quand 0 est racine de P_n, alors n est impair et alors $P_n'(0) = -2nP_{n-1}(0) \neq 0$ d'après ce qui précède, donc 0 est racine simple.

Question 7) En comparant les deux relations de récurrence (la définition et celle obtenue en question 5), on a $P_n' = -2nP_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. C'est d'ailleurs ce qui a été utilisé ci-dessus.

On pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat : « les racines de P_n sont simples ».

$P_1 = -2X$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors par l'absurde, on suppose que P_{n+1} a une racine multiple a,

donc $P_{n+1}(a) = 0 = -2aP_n(a) + P_n'(a)$ et $P_{n+1}'(a) = 0 = -2(n+1)P_n(a)$, donc il vient $P_n(a) = 0 = P_n'(a)$, donc a est racine multiple de P_n, ce qui contredit la proposition de récurrence $\mathscr{P}(n)$, donc P_{n+1} ne peut avoir que des racines simples

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 8)

a) Q ayant une racine simple a, on a donc $Q'(a) \neq 0$ donc d'après un résultat du cours (voir chapitre sur les calculs de limites), $Q(x) - Q(a) \underset{x \to a}{\sim} Q'(a)(x-a)$, c'est-à-dire $Q(x) \underset{x \to a}{\sim} Q'(a)(x-a)$.
Au voisinage à gauche de a, $Q(x)$ a le même signe que $Q'(a)(x-a)$ donc est du signe de $-Q'(a)$; à droite, $Q(x)$ est du signe de $Q'(a)$.

b) Sur chaque intervalle $]-\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[$, …, $]a_{n-1}, +\infty[$, la fonction $x \mapsto P_{n-1}(x)$ est continue et ne s'annule pas, donc elle y est de signe constant d'après le th. des valeurs intermédiaires.
On a montré $\lim\limits_{-\infty} P_{n-1} = +\infty$ donc P_{n-1} est positive sur $]-\infty, a_1[$. D'après la question précédente, comme les racines de P_{n-1} sont simples, la fonction $x \mapsto P_{n-1}(x)$ change de signe en chaque racine, donc P_{n-1} devient négative sur $]a_1, a_2[$, puis positive sur $]a_2, a_3[$, etc, ce qui justifie le tableau de signes.
De plus, d'après la question précédente, comme il y a changement de signe en a_i, la dérivée $P_{n-1}'(a_i)$ a le même signe que P_{n-1} au voisinage à droite de a_i, donc $\operatorname{sgn} P_{n-1}'(a_1) = -1$, $\operatorname{sgn} P_{n-1}'(a_2) = +1$, etc : pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\operatorname{sgn} P_{n-1}'(a_i) = (-1)^i$.
Et comme $P_n(a_i) = -2a_iP_{n-1}(a_i) + P_{n-1}'(a_i) = P_{n-1}'(a_i)$, on en déduit les signes des nombres $P_n(a_i)$: pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\operatorname{sgn} P_n(a_i) = \operatorname{sgn} P_{n-1}'(a_i) = (-1)^i$.

c) Comme $P_n' = -2nP_{n-1}$, on connaît le signe de P_n' donc les variations de P_n.
si n est pair :

x	$-\infty$		a_1		a_2		a_3		$\dots$		$+\infty$
${P_n}'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P_n(x)$	$+\infty$	↘	< 0	↗	> 0	↘	< 0	↗	$\dots$	↗	$+\infty$

si n est impair :

x	$-\infty$		a_1		a_2		a_3		$\dots$		$+\infty$
${P_n}'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	
$P_n(x)$	$+\infty$	↘	< 0	↗	> 0	↘	< 0	↗	$\dots$	↘	$-\infty$

Sur chaque intervalle $]-\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[$, …, $]a_{n-1}, +\infty[$, la fonction P_n est strictement monotone, continue et change de signe, donc d'après le th. de la valeur intermédiaire, elle s'annule une fois sur chaque intervalle. Elle s'annule donc au total n fois et comme elle est de degré n, on a donc toutes les racines, qui sont réelles et simples.
Par récurrence, on a donc montré que pour tout $n \geqslant 1$, P_n a n racines réelles simples.

Problème 2

Question 1) $\mathscr{A}$ est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$ donc est non vide, stable par $+$ et par opposition. Pour montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$, il reste à montrer que $\operatorname{Id} \in \mathscr{A}$ (évident) et que $\mathscr{A}$ est stable par $\circ$.

$(\lambda f + \mu \mathrm{Id}) \circ (\sigma f + \tau \mathrm{Id}) = (\lambda\sigma) f^2 + (\lambda\tau + \mu\sigma) f + (\mu\tau)\mathrm{Id} = (\lambda\sigma)(af + b\mathrm{Id}) + (\lambda\tau + \mu\sigma) f + (\mu\tau)\mathrm{Id}$

donc $(\lambda f + \mu \mathrm{Id}) \circ (\sigma f + \tau \mathrm{Id}) = (a\lambda\sigma + \lambda\tau + \mu\sigma) f + (b\lambda\sigma + \mu\tau)\mathrm{Id} \in \mathscr{A}$, donc $\mathscr{A}$ est stable par $\circ$.

Question 2)

a) α et β sont solutions du système proposé si et s.si ils sont racines du polynôme $X^2 - ax - b$. Par hypothèse, ce polynôme a un discriminant non nul donc possède deux racines complexes distinctes.

b) Simple calcul : $(f - \alpha\,\mathrm{Id}) \circ (f - \beta\,\mathrm{Id}) = f^2 - (\alpha + \beta) f + \alpha\beta \mathrm{Id} = f^2 - af - b\mathrm{Id} = 0$.
Remarque : ça marche dans l'autre sens aussi, $(f - \beta\,\mathrm{Id}) \circ (f - \alpha\,\mathrm{Id}) = 0$.

Question 3)

a) Deux façons de faire : la première est de revenir à la définition (stabilité par $+$ et $\mathbb{C}.$: facile, je ne détaille pas), la deuxième est de remarquer que $A = \mathrm{Ker}(f - \alpha\mathrm{Id})$ est le noyau d'une application linéaire donc un s.e.v. d'après le cours.

b) Si $x \in A \cap B$, alors $f(x) = \alpha x = \beta x$, or $\alpha \neq \beta$ donc $x = 0$.
Les deux s.e.v. sont en somme directe.

Question 4) Soit $y \in \mathrm{Im}(f - \beta\mathrm{Id})$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) - \beta x$, donc par linéarité de f,

$f(y) = f^2(x) - \beta f(x) = (a - \beta) f(x) + bx = \alpha f(x) + \alpha\beta x = \alpha(f(x) - \beta x) = \alpha y$ donc $y \in A$.

De même, en échangeant les rôles de A et B, donc de α et β.

Question 5)

a) Si u et v existent, alors $x = u + v$, donc $f(x) = f(u) + f(v) = \alpha u + \beta v$ donc $f(x) - \beta x = (\alpha - \beta) u$ donc $u = \dfrac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \beta x)$. De même, $v = \dfrac{1}{\beta - \alpha}(f(x) - \alpha x)$

b) On remarque que $u \in \mathrm{Im}(f - \beta\mathrm{Id})$ donc $u \in A$ d'après la question 4. De même, $v \in B$. Et de manière évidente, $x = u + v$.
On a donc mené une démonstration par analyse-synthèse, qui prouve $E = A \oplus B$.

Question 6)

a) Par récurrence immédiate, $f^n(x) = \alpha^n u + \beta^n v$.

b) On a donc $f^n(x) = \alpha^n \dfrac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \beta x) + \beta^n \dfrac{1}{\beta - \alpha}(f(x) - \alpha x)$

donc $f^n(x) = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} f(x) + \dfrac{\alpha\beta^n - \alpha^n\beta}{\alpha - \beta} x$.

Come ceci est vrai pour tout $x \in E$, $f^n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} f + \dfrac{\alpha\beta^n - \alpha^n\beta}{\alpha - \beta}\mathrm{Id}$.

Question 7) Comme $b \neq 0$, on a $\mathrm{Id} = \dfrac{1}{b}(f^2 - af) = \dfrac{1}{b} f \circ (f - a\mathrm{Id}) = \dfrac{1}{b}(f - a\mathrm{Id}) \circ f$.

Donc f est inversible et $f^{-1} = \dfrac{1}{b}(f - a\mathrm{Id}) = \dfrac{1}{b} f - \dfrac{a}{b}\mathrm{Id}$.

Or $\dfrac{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}{\alpha - \beta} = \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} = \dfrac{-1}{\alpha\beta} = \dfrac{1}{b}$ et de même, $\dfrac{\alpha\beta^{-1} - \alpha^{-1}\beta}{\alpha - \beta} = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} = \dfrac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = -\dfrac{a}{b}$.

Donc l'expression $f^n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} f + \dfrac{\alpha\beta^n - \alpha^n\beta}{\alpha - \beta}\mathrm{Id}$ est encore valable pour $n = -1$.

On peut alors montrer qu'elle reste valable pour tout entier $n = -k$ où $k \in \mathbb{N}^*$ par récurrence sur k, par exemple.

Problème 3

Partie 1

Question 1)

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp_t(x) = e^{t+x} = e^t \exp(x) = e^t \exp_0(x)$ donc $\exp_t = e^t \exp_0$.
Ceci prouve que exp est de type 1.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos_t(x) = \cos(t + x) = \cos t \cos x - \sin t \sin x = \cos t \cos x + \sin t \cos(x + \pi/2)$ donc $\cos_t = \cos t \cos_0 + \sin t \cos_{\pi/2}$. Donc cos est de type 2.
Si cos est de type 1, alors il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\cos_t = \alpha \cos_u$, autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + t) = \alpha \cos(x + u)$. En particulier, on peut prendre $x + u = \pi/2$ donc $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{2} - u\right) = \alpha \times 0 = 0$. Comme t est arbitraire, on en déduit que la fonction cos est alors nulle : contradiction.

Question 2) Si une famille $(f_{t_1}, ..., f_{t_n})$ qui convient dans la définition est liée, alors l'une des fonctions est combinaison linéaire des autres donc si on la supprime de la famille, le s.e.v. engendré ne change pas, donc toute fonction f_t est combinaison linéaire des fonctions de cette famille raccourcie, donc f est de type $n-1$: contradiction.

Question 3)

a) F est de dimension p donc les familles libres ont au plus p vecteurs.

b) Soit A l'ensemble des entiers k tels qu'il existe une famille libre de k translatées de f. Cet ensemble d'entiers est non vide car $f \neq 0$ et majoré par p d'après la question précédente, donc d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, il a un maximum n. Comme $n \in A$, on en déduit que $n \leqslant p$.

c) Soit $t \in \mathbb{R}$, on considère la famille $(f_t, f_{t_1}, ..., f_{t_n})$ qui contient $n+1$ translatées de f. Par définition de n, cette famille est liée. Or la famille $(f_{t_1}, ..., f_{t_n})$ est libre, donc d'après le cours, f_t est combinaison linéaire de $(f_{t_1}, ..., f_{t_n})$. Donc f est de type n.

Question 4) Le sens $\Rightarrow$ est immédiat : c'est la définition. La réciproque est ce qu'on vient de montrer ci-dessus.

Question 5) TF est une partie de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}$-e.v. connu. TF est non vide (il contient la fonction nulle, la fonction exp, etc).

Soit f, g deux fonctions de TF, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(f+g)_t = f_t + g_t$: on sait qu'il existe un s.e.v. F de dimension finie qui contient les fonctions f_t et un autre G qui contient les fonctions g_t, donc le s.e.v. $F+G$ est de dimension finie et contient les fonctions$(f+g)_t$. Donc $f+g \in TF$.

Pour la multiplication par un scalaire, c'est immédiat.

Donc TF est stable par $+$ et par $\mathbb{R}.$, donc TF est un s.e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donc lui-même un $\mathbb{R}$-e.v.

Partie 2

Question 1)

a) f est de type 1, donc l'ensemble de ses translatées est une droite vectorielle. En particulier, $f_0 = f$ dirige cette droite, donc les translatées de f sont colinéaires à f.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$: il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f_t = \alpha f$, donc en particulier $f_t(x_0) = \alpha f(x_0)$ donc $\alpha = \dfrac{f_t(x_0)}{f(x_0)} = \dfrac{f(t+x_0)}{f(x_0)}$, ce qu'on voulait.

Question 2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t+x) = \dfrac{f'(t+x_0)}{f(x_0)} f(x)$.

Puisque c'est vrai pour tout t, on peut choisir $t=0$ maintenant, on a alors $f'(x) = \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} f(x)$.

f est donc solution d'une équation différentielle du premier ordre $y' = ky$ où k est une constante.

Question 3) Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{kx}$. Réciproquement, on vérifie comme dans la partie 1 que ces fonctions sont de type 1 : les fonctions de type 1 sont donc les fonctions exponentielles $x \mapsto \lambda e^{kx}$ avec λ et k quelconques.

Partie 3

Question 1) Si (h,k) est libre, alors h est non nulle, donc il existe a tel que $h(a) \neq 0$. Donc si pour tout $b \in \mathbb{R}$, le déterminant $\begin{vmatrix} h(a) & k(a) \\ h(b) & k(b) \end{vmatrix} = 0$, alors $h(a)k(b) = h(b)k(a)$ donc $k(b) = \dfrac{k(a)}{h(a)} h(b)$, autrement dit $k = \dfrac{k(a)}{h(a)} h$, donc k et h colinéaires : contradiction.

Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{vmatrix} h(a) & k(a) \\ h(b) & k(b) \end{vmatrix} \neq 0$.

Réciproquement, si $\begin{vmatrix} h(a) & k(a) \\ h(b) & k(b) \end{vmatrix} \neq 0$, alors on considère l'équation $\alpha h + \beta k = 0$.

En particulier, $\begin{cases} \alpha h(a) + \beta k(a) = 0 \\ \alpha h(b) + \beta k(b) = 0 \end{cases}$, système de Cramer puisque son déterminant est non nul : il a donc pour seule solution le couple $(0,0)$, ce qui prouve que (h,k) est libre.

Question 2)

a) D'après la question 2 b de la partie 1, (f_{t_1}, f_{t_2}) est libre, donc d'après la question précédente, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{vmatrix} f_{t_1}(a) & f_{t_2}(a) \\ f_{t_1}(b) & f_{t_2}(b) \end{vmatrix} \neq 0$.

b) On utlise les formules de Cramer :
pour $x = a$, on a $f(a+t) = g(t)f_{t_1}(a) + h(t)f_{t_2}(a)$ et de même pour $x = b$. $g(t)$ et $h(t)$ sont solutions d'un système à deux équations et deux inconnues de déterminant non nul.
g et h sont donc définies comme des combinaisons linéaires de f_a et f_b, ce qui prouve qu'elles sont deux fois dérivables d'après les th. d'opérations sur les fonctions dérivables.

Question 3)

a) Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x+t) = g'(t)f_{t_1}(x) + h'(t)f_{t_2}(x)$ et $f''(x+t) = g''(t)f_{t_1}(x) + h''(t)f_{t_2}(x)$.
Autrement dit, $f_t \in \text{vect}(f_{t_1}, f_{t_2})$ et de même pour f'_t et f''_t.

b) L'espace $\text{vect}(f_{t_1}, f_{t_2})$ est de dimension 2 donc la famille (f, f', f'') est liée. Comme (f, f') est libre (sinon f serait de type 1 d'après la partie précédente), on en déduit que f'' est comb. lin. de f et f' : $f' = \alpha f' + \beta f$.

Question 4) Comme solutions d'une telle équation, on peut donc avoir :
— des fonctions du type $x \mapsto \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$
— des fonctions du type $x \mapsto \lambda e^{rx} + \mu x e^{rx}$
— des fonctions du type $x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$
Il suffit de vérifier que ces fonctions sont bien de type 2, ce qui est similaire à ce qui a été fait dans la partie 1. On trouve que dans tous les cas, λ et μ sont quelconques. On a donc trouvé les fonctions de type 2 et deux fois dérivables.