ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Soit $E = K_n[X]$. Soit $P_0, \dots, P_n$ $(n+1)$ polynômes telles que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_i = i$.

Montrez que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.

****2)** Même exercice avec des polynômes telles que $\operatorname{val} P_i = i$ (la valuation d'un polynôme P est l'ordre de multiplicité de la racine 0, avec la convention que la valuation vaut 0 si 0 n'est pas racine de P).

***3)** Dans un K- e.v. E de dimension 4, soit $\mathscr{B}$ une base (toutes les coordonnées sont exprimées dans cette base). Soit u, v, w, x, y, z les 6 vecteurs dont les coordonnées sont respectivement :

$$\begin{pmatrix}-1\\6\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-2\\4\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\2\\-3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\10\\8\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\\-5\end{pmatrix}$$

a) Calculez le rang des familles (u, v, y) et (w, x, z).
b) Donnez des bases des s.e.v. $\operatorname{vect}(u, v, y)$ et $\operatorname{vect}(w, x, z)$.
c) Montrez que la famille (u, v, w, x, y, z) est génératrice de E. Est-ce une base ?
d) Déterminez le rang de cette famille.
e) Donnez une base de E constituée de vecteurs pris dans cette famille.

****4)** Dans des espaces vectoriels ad hoc, donnez le rang des familles de vecteurs, dont les coordonnées sont écrites en colonnes dans les matrices suivantes, ainsi qu'une famille principale extraite :

$$\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&1&-4&5\\1&0&2&-1\\-1&-1&1&-4\\1&-1&-2&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&2&-1&2\\2&1&1&0&3\\3&1&1&-1&0\\4&3&1&2&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&-3&5\\-1&0&6\\0&0&2\\1&-3&4\\-5&2&7\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&a+c&a+b\\bc&ac&ab\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a-b-c&2b&2c\\2a&b-a-c&2c\\2a&2b&c-a-b\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&a&1&b\\a&1&b&1\\1&b&1&-a\\b&1&-a&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&a&1&-b\\a&1&-b&1\\1&b&1&-a\\b&1&-a&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b&a&b\\c&c&d&d\\ac&bc&ad&bd\end{pmatrix}$$

****5)** Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k : x \mapsto \cos^k x$ et $b_k : x \mapsto \cos(kx)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose aussi $E_n = \operatorname{vect}(a_0, \dots, a_n)$ et $F_n = \operatorname{vect}(b_0, \dots, b_n)$.

a) On veut montrer que la famille $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est libre. Écrivez l'équation à résoudre pour répondre à cette question. Résolvez-la en l'écrivant sous la forme $\forall c \in [-1, +1] \quad P(c) = 0$ où P est une fonction polynôme.
b) Quelle est la dimension de E_n ?
c) Montrez que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in F_n$.
d) Justifiez que $\dim F_n \leqslant n + 1$.
e) Montrez enfin que $E_n = F_n$.

****6)** Dans un K-e.v. E de dimension 4 muni d'une base, soit u, v, w, t les quatre vecteurs de coordonnées dans cette base

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Soit $A = \operatorname{vect}(u, v)$ et $B = \operatorname{vect}(w, t)$. Montrez que A et B sont supplémentaires sans résoudre de système d'équations.

****7)** Dans un K-e.v. E de dimension 5 muni d'une base, soit u, v, w, t les quatre vecteurs de coordonnées dans cette base

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-4\\10\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\-2\\-11\end{pmatrix}$$

Soit $A = \operatorname{vect}(u, v, w, t)$. Déterminez la dimension de A, une base de A et un supplémentaire de A.

****8)** Dans un K-e.v. E de dimension 4 muni d'une base, soit a, b, c, d, e les cinq vecteurs de coordonnées dans cette base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ y \end{pmatrix}$$

où x et y sont deux paramètres appartenant à K.

Soit $U = \text{vect}(a, b, c)$, $V = \text{vect}(d, e)$. Déterminez une condition sur x et y pour que $E = U + V$.

Dans ce cas, déterminez les dimensions de U, V, $U \cap V$, donnez une base de chacun de ces 3 s.e.v. La somme $U + V$ est-elle directe ?

Dans le cas contraire, que dire des deux s.e.v. U et V ?

****9)** Soit E un K-e.v. de dimension finie et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Déterminez le rang de la famille de vecteurs défini par : $x_1 = e_1 + e_2$, $x_2 = e_2 + e_3$, ... , $x_{n-1} = e_{n-1} + e_n$ et $x_n = e_n + e_1$.

****10)** Soit E un K-e.v. de dimension n, $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q) \in E^{p+q}$. Soit $U = \text{vect}(u_1, ..., u_p)$ et $V = \text{vect}(v_1, ...v_q)$. Montrez que $E = U \oplus V$ si et seulement si $n = \text{rg}(u_1, ..., u_n) + \text{rg}(v_1, ..., v_q) = \text{rg}(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q)$.

****11)** Soit E un K-e.v. de dimension 5 muni d'une base : pour tout vecteur $x \in E$, on note $x_1, ..., x_5$ les coordonnées de x dans cette base.

Soit $F = \{x \in E / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$,

$G = \{x \in E / 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0,\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0,\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$

a) Montrez que F et G sont deux s.e.v. de E.

b) Déterminez leur dimension et une base de chacun d'eux.

c) Justifiez que F et G ne sont pas supplémentaires.

d) Déterminez la dimension de $F \cap G$, ainsi qu'une base de ce s.e.v.

****12)** Soit E un K-e.v. de dimension 4 muni d'une base : pour tout vecteur $x \in E$, on note $x_1, ..., x_4$ les coordonnées de x dans cette base.

Soit $F = \{x \in E / x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$,

$G = \{x \in E / -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$

a) Montrez que F et G sont deux s.e.v. de E.

b) Déterminez leur dimension et une base de chacun d'eux.

c) F et G sont-ils supplémentaires ?

****13)** Soit E un K-e.v. de dimension finie et F, G deux sous e.v. de E tels que $\dim F + \dim G > \dim E$.

Montrez que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

*****14)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a) Soit F un sous espace vectoriel de E tel que $F \neq E$: on peut choisir $x \in E - F$. Montrez qu'il existe un hyperplan H de E contenant F et tel que $x \notin H$.

b) Démontrez que tout sous-espace vectoriel F propre de E est égal à l'intersection des hyperplans qui le contiennent.

c) Écrivez F comme l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans de E.

*****15)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F, G deux s.e.v. de E.

Montrez que F et G ont un supplémentaire commun si et seulement si $\dim F = \dim G$.