APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

****1)** Montrez que les applications linéaires « diminuent la dimension », c'est-à-dire que si f est une application linéaire de E dans F et V un s.e.v. de dimension finie de E, alors $f(V)$ est un s.e.v. de dimension finie de F et que $\dim f(V) \leqslant \dim V$.

Quelles sont les applications linéaires qui « conservent la dimension », c'est-à-dire que pour tout s.e.v. V de E, alors $\dim f(V) = \dim V$?

****2)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in K_n[X]$, on pose $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.

a) Montrez que f est un endomorphisme de $K_n[X]$.

b) Décomposez en éléments simples la fraction $\dfrac{nX}{X^2-1}$.

c) Montrez que si n est impair, alors f est un automorphisme.

d) Montrez que si n est pair, alors $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle. Déduisez-en la dimension de $\operatorname{Im} f$.

****3)** Soit f un endomorphisme de $K[X]$ qui conserve le degré : pour tout $P \in K[X]$, $\deg f(P) = \deg P$.

Montrez que f est un automorphisme de $K[X]$ (on pourra étudier les restrictions de f à $K_n[X]$).

****4)** Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrez que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ si et s.si n est pair, $\operatorname{rg} f = \dfrac{n}{2}$ et $f \circ f = 0$.

b) Donnez un exemple d'une telle application linéaire f.

c) Si les conditions de la question a sont satisfaites, alors on pose $r = n/2$: montrez qu'il existe $(e_1, \dots, e_r) \in E^r$ tel que $(e_1, \dots, e_r, f(e_1), \dots, f(e_r))$ soit une base de E.

****5)** Soit E un K-e.v. de dimension 3, f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

a) Déterminez les dimensions de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

b) Soit u un vecteur non nul de $\operatorname{Im} f$ et v un antécédent de u par f. Justifiez l'existence d'un vecteur w du noyau tel que (u, v, w) soit une base de E.

****6)** Soit E un K-e.v. de dimension finie et $f \in L(E)$, montrez l'équivalence

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Ker} f \circ f = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f \circ f$$

****7)** Soit E, F deux K-e.v. de dimensions finies et $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2$. Montrez que $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

****8)** Soit E un K-e.v. de dimension n, $f \in L(E)$ telle que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ où p est un entier non nul.

a) Montrez qu'il existe un vecteur u tel que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre. Que peut-on en déduire concernant les deux entiers p et n ?

b) Application : soit E un espace de dimension 3, $g \in L(E)$ telle que $g^{125} = 0$ et $g \neq 0$, montrez qu'il n'existe pas d'endomorphisme f de E tel que $f^3 = g$.

****9)** Soient E un K-e.v. de dimension finie et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$. Démontrez que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim(E)$.

****10)** Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(F, G) \times \mathscr{L}(E, G)$.

Montrez qu'il existe $w \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $u \circ w = v$ si et s.si $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$.

****11)** Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(E, G)$.

Montrez qu'il existe $w \in \mathscr{L}(F, G)$ tel que $w \circ u = v$ si et s.si $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$.

*****12)** Soit E un K-e.v. de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrez qu'il existe $g \in L(E)$ tel que $f \circ g \circ f = f$ et $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$.

b) Montrez que pour tout endomorphisme g qui convient dans la proposition précédente, on peut en déduire $g \circ f \circ g = g$.

c) Application : déterminez f vérifiant $\forall u \in \mathscr{L}(E) \quad (f \circ u)^2 = 0$.