Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Dimension d'un espace vectoriel

1.1 Dimension finie ou infinie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On dit que E est un espace de dimension finie quand il possède une base finie ou quand il est réduit à $\{0\}$. Sinon, il est dit de dimension infinie.

Exemples.

— $\mathbb{K}^n$ est un espace de dimension finie : il possède une base contenant   vecteurs.
— $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace de dimension finie : il possède une base contenant   vecteurs.
— L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est un espace de dimension finie : il possède une base de   vecteurs.
— L'espace des solutions d'un système linéaire est de dimension finie.
— $\mathbb{K}[X]$ est un espace de dimension infinie.
— Les espaces de fonctions $C^0(I, \mathbb{K})$, $D^1(I, \mathbb{K})$, $C^1(I, \mathbb{K})$, etc, sont tous de dimension infinie.

L'intérêt des espaces de dimension finie est de pouvoir déterminer les propriétés des familles de vecteurs en étudiant les propriétés de systèmes linéaires.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une base de n vecteurs ($n \geqslant 1$) et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on écrit $v_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

On appelle matrice de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ dans la base $\mathscr{B}$ la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, notée $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(v_1, \ldots, v_p)$:

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(v_1, \ldots, v_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Proposition 1. *Avec les notations précédentes, on note S_B le système linéaire de matrice A et de second membre $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (les inconnues sont notées par exemple $\lambda_1, \dots, \lambda_p$), S_0 le système linéaire homogène associé.*

Alors

- *la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille libre si et seulement si le système S_0 a pour unique solution la solution nulle ;*
- *la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille génératrice de E si et seulement si pour tout second membre B, le système S_B a au moins une solution ;*
- *la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de E si et seulement si pour tout second membre B, le système S_B a une unique solution.*

1.2 Dimension

On commence par un petit résultat préparatoire.

Proposition 2. *Dans un espace de dimension finie possédant une base de cardinal n, les familles libres ont moins de n vecteurs.*

On en déduit le théorème principal à propos de la dimension finie.

Théorème 1. *Dans un espace E de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal (* i.e. *le même nombre de vecteurs). Ce nombre est appelé la dimension de l'espace, notée* $\dim E$.

Par convention, on dit que l'espace $\{0\}$ est de dimension 0.

Exemple. $\dim \mathbb{K}^n =$; $\dim \mathbb{K}_n[X] =$.

1.3 Familles libres dans un espace de dimension finie

Lemme 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.*

Si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre et si v n'est pas combinaison linéaire de $(u_1, \dots, u_n)$, alors la famille $(u_1, \dots, u_n, v)$ est encore libre.

L'intérêt de connaître la dimension d'un espace vectoriel réside dans le théorème suivant.

Théorème 2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.*

Toute famille libre de E a moins de n vecteurs.

De plus, si une famille de vecteurs de E est libre et possède exactement n vecteurs, alors cette famille est une base de E.

Exercices :

1) Dans l'espace $\mathbb{C}^3$, la famille $\big((-2,1,1), (1,-2,1), (1,1,-2)\big)$ est-elle une base ?
   La famille $\big((1,0,1), (i,1,0), (1,0,i)\big)$ est-elle une base ?
2) Dans l'espace $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\big(X-1, X-2, X^2\big)$ est-elle une base ? Même question avec la famille $\big(X-1, X^2+1, X+2, 3\big)$.
3) Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $v_i = (1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1)$ où a est situé en position i. À quelle condition sur a la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est-elle une base de E ?

Un exemple fondamental : les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires distincts. On appelle polynômes d'interpolation de Lagrange associés à la famille $(a_0, \dots, a_n)$ les polynômes L_i ($i \in [\![0, n]\!]$) définis par

$$L_i = \prod_{k=0,\ k \neq i}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$$

Proposition 3. *Avec les mêmes notations, la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*

On peut préciser le résultat sur le cardinal des familles libres dans le cas où la famille a strictement moins de n vecteurs.

Théorème 3 (Théorème de la base incomplète)**.**
Dans un espace de dimension n, toute famille libre ayant strictement moins de n vecteurs peut être complétée en une base de E ; autrement dit, si une famille libre de E possède p vecteurs et si $p < n$, alors il existe $n - p$ vecteurs de E tels que en ajoutant ces vecteurs à la famille libre, on obtienne une base de E.

Remarque. On peut même être encore plus précis : les vecteurs à ajouter peuvent être pris parmi les vecteurs d'une base donnée par avance.

Attention : on peut choisir dans quel ensemble de vecteurs trouver des vecteurs à ajouter (l'ensemble des vecteurs d'une base choisie comme on le souhaite), mais ça ne dit pas qu'on peut choisir les vecteurs arbitrairement !

***Exercices* :**

1) Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on pose $u = (1, 1, -1, 1)$ et $v = (-1, 1, 0, 1)$. Vérifiez qu'on peut compléter la famille (u, v) en une base et donnez un exemple d'une telle complétion.

2 Rang d'une famille de vecteurs

2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Lemme 2. *Dans un espace de dimension infinie, on peut trouver des familles libres de cardinal arbitrairement grand.*

On en déduit les résultats suivants.

Proposition 4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*
Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.

On peut se servir de la dimension pour montrer l'égalité de deux espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition 5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*
Si F un sous-espace vectoriel de E et $\dim F = \dim E$, *alors $F = E$.*

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.
La dimension de $\mathrm{vect}(v_1, \dots, v_p)$ est appelée le rang de la famille $(v_1, \dots, v_p)$, noté $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p)$.

Proposition 6. *Avec les mêmes notations, si r est le rang de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$, alors*
- *on peut extraire de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ une sous-famille de r vecteurs qui forment une famille libre ;*
- *toute sous-famille de $(v_1, \ldots, v_p)$ contenant strictement plus de r vecteurs est liée.*

Donc r est le cardinal maximal des familles libres extraites de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$.

Définition. Toute famille libre de cardinal r extraite d'une famille de vecteurs de rang r est appelée famille principale (extraite de $(v_1, \ldots, v_p)$).

Toute famille principale extraite de $(v_1, \ldots, v_p)$ est donc une base de $\mathrm{vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

Proposition 7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.*

Alors $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) \leqslant \min(n, p)$.

En particulier,
- $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) = p$ *si et s.si* $(v_1, \ldots, v_p)$ *est une famille libre ;*
- $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) = n$ *si et s.si* $(v_1, \ldots, v_p)$ *est une famille génératrice de E.*

2.3 Méthode du pivot de Gauss pour calculer le rang d'une famille

Proposition 8. *Le rang d'une famille de vecteurs n'est pas modifié quand*
- ▷ *on multiplie un des vecteurs par un scalaire non nul ;*
- ▷ *on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres ;*
- ▷ *on change l'ordre des vecteurs ;*
- ▷ *on ajoute ou supprime un vecteur combinaison linéaire des autres.*

Application : dans un espace de dimension finie, calcul pratique du rang par opérations sur les colonnes d'une matrice.

2.4 Familles génératrices dans un espace de dimension finie

Théorème 4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.*

Toute famille génératrice de E a plus de n vecteurs.

De plus, si une famille de vecteurs de E est génératrice et possède exactement n vecteurs, alors cette famille est une base de E.

Théorème 5 (Théorème de la base extraite)**.**
Dans un espace de dimension n, de toute famille génératrice de E ayant strictement plus de n vecteurs, on peut extraire une sous-famille qui est une base de E.

3 Somme de sous-espaces vectoriels et dimensions

3.1 Dimension d'une somme directe de deux s.e.v.

Proposition 9. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F, G deux s.e.v. de E.*

Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

On remarque que ce théorème fournit un moyen de construire une base de l'espace somme en concaténant les deux bases des s.e.v.

On peut généraliser.

Proposition 10. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \ldots, F_n$ des s.e.v. de E.*

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe, alors $\dim \bigoplus_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

En fait, la réciproque est vraie.

Proposition 11. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \ldots, F_n$ des s.e.v. de E.*

Si $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$, *alors $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe.*

3.2 Sous-espaces supplémentaires

En dimension finie, on a une façon plus simple de prouver que deux s.e.v. sont supplémentaires.

Proposition 12 (3 pour le prix de 2)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F, G deux s.e.v. de E. Quand deux propriétés parmi les trois suivantes sont vraies, alors la troisième l'est aussi :*
- $E = F + G$
- $F \cap G = \{0\}$
- $\dim E = \dim F + \dim G$

Donc dans ce cas, F et G sont supplémentaires.

Exercices **:**

1) Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \mathrm{vect}(\,(-1,0,1,1),\ (2,-1,1,0)\,)$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+z+t = 0 \text{ et } x-y-z+t = 0\}$. F et G sont-ils deux s.e.v. supplémentaires ?

Ce qui précède donne une façon de prouver qu'un s.e.v. est supplémentaire d'un autre, mais ça ne prouve pas qu'il en existe. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 6. *Dans un espace de dimension finie, tout s.e.v. possède au moins un supplémentaire. Mis à part les deux sous-espaces triviaux, tout s.e.v. possède une infinité de supplémentaires.*

Exercices **:**

1) Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y - z = 0,\ y + z + t = 0\}$. Donnez deux supplémentaires de G dans $\mathbb{R}^4$.

3.3 Dimension d'une somme de deux s.e.v.

On en déduit le théorème de Grassmann.

Proposition 13. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F, G deux s.e.v. de E.*

Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

4 Applications linéaires en dimension finie

4.1 Théorème du rang

Théorème 7. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F.*

Alors $\mathrm{Im}\, f$ *est un sous-espace de dimension finie de F et* $\dim E = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f$.

Définition. Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle rang d'une application linéaire la dimension de son image : $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.

Le résultat du théorème précédent se réécrit donc $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$.

***Exercices* :**

1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = (x + y - z,\, 2x - y + z)$. Montrez que f est linéaire et donnez son rang. Donnez sans calcul une base de son noyau.
2) Soit f définie sur $\mathbb{R}_4[X]$ par $f(P) = (1-X^2)P' + 4XP$. Vérifiez que f est un endomorphisme de $R_4[X]$, déterminez son noyau, son rang et son image.

4.2 Cas des endomorphismes

Théorème 8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E.*
Il y a équivalence entre
- *f est injective ;*
- *f est surjective ;*
- *f est bijective.*

5 Hyperplans

5.1 Généralité

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un s.e.v. de E.
On dit que F est un hyperplan quand il a pour supplémentaire une droite vectorielle.

5.2 Formes linéaires

Définition. Une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-e.v. E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Proposition 14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un s.e.v. de E.*
Alors F est un hyperplan de E si et seulement si F est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Dans ce cas, si φ est une telle forme linéaire, tout vecteur u tel que $\varphi(u) \neq 0$ engendre une droite supplémentaire de F.

5.3 Hyperplans en dimension finie

Dans un espace de dimension n, un hyperplan est donc un s.e.v. de dimension $n - 1$.

Proposition 15. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E. À tout vecteur $x \in E$, on associe ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ notées $(x_1, \ldots, x_n)$.*
Soit H une partie de E.
H est un hyperplan de E si et s. si
il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ tel que $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ et $H = \{x \in E \ / \ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$.

L'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ est appelée une équation de H dans la base $\mathscr{B}$. Les autres équations de H sont les multiples non nuls de celle-ci.