Mp2i - Programme de colles 22

Semaine du 15 mars au 1er avril 2022

1 Reprise des deux chapitres précédents

Espaces vectoriels
Applications linéaires

2 Espaces vectoriels de dimension finie

a) Définition d'un espace de dimension finie ou infinie, exemples fondamentaux. Intérêt des espaces de dimension finie : traduction grâce aux systèmes linéaires des propriétés d'une famille de vecteurs, matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
b) Dans un e.v. ayant une base de n vecteurs, toute famille libre a moins de n vecteurs. Définition de la dimension d'un e.v. Un famille libre ayant le bon nombre de vecteurs est une base, sinon on peut la compléter en une base.
c) Dimension d'un s.e.v. Rang d'une famille de vecteurs, famille principale extraite d'une famille de vecteurs. Calcul pratique par la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice.
d) Familles génératrices d'un e.v., de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
e) Dimension d'une somme directe de deux s.e.v., d'une somme directe de plusieurs s.e.v. Caractérisation des couples de s.e.v. supplémentaires à l'aide des dimensions. Existence de supplémentaires. Théorème de Grassmann sur la dimension d'une somme de deux s.e.v.
f) Applications linéaires en dimension finie : théorème du rang, application à l'inversibilité des endomorphismes.

Démonstrations à connaître
— dimension d'une somme directe de deux s.e.v.
— th. du rang
— le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan