APPLICATIONS LINÉAIRES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à (x,y,z) associe $(x+2y+z, -3x+5y+z, -7x+19y+5z)$. Montrez que f est linéaire, déterminez $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

***2)** Soit F l'application de $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui à f associe $f''-3f'+2f$. Montrez que F est linéaire, déterminez son noyau.

***3)** Soit $E = \{x \mapsto ax + b\sqrt{x^2+1} + c \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$. Pour $f \in E$, on pose $\phi(f) = (x \mapsto f'(x)\sqrt{x^2+1})$.

Montrer que $\phi \in \mathscr{L}(E)$ puis déterminer $\operatorname{Ker}(\phi), \operatorname{Im}(\phi), \operatorname{Ker}(\phi \circ \phi)$ et $\operatorname{Im}(\phi \circ \phi)$

****4)** Soit $a \in \mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}-$e.v. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z + a\overline{z}$.

a) Montrez que f est linéaire.

b) Montrez que si $|a| \neq 1$, alors f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.

c) Déterminez le noyau et l'image de f dans le cas où $a = e^{i\alpha}$ (on pourra utiliser l'écriture trigonométrique des complexes).

***5)** Montrez que l'image d'une famille libre par une application linéaire n'est pas forcément libre. Quelle condition sur l'application linéaire doit-elle être vérifiée pour que cela devienne vrai ?

***6)** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.

a) Pour $P \in E$, on pose $f(P) = XP' - 3P$. Montrez que f est un endomorphisme de E. Déterminez son noyau et son image.

b) Pour $P \in E$, on pose $g(P) = X^3 P\left(\dfrac{1}{X}\right) - P$. Faites de même avec g.

c) Calculez les noyaux et images de $f \circ g$ et $g \circ f$.

d) Soit $F = \{P \in E \ / \ P(-1) = P(1) = 0\}$. Montrez que F est un s.e.v. de E, donnez-en une base et précisez son image par f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

***7)** Soit $E = K^3$. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$f(x,y,z) = (-x+3y-3z, x+y-3z, 7x-7y+5z)$$

a) Montrez que $f \in GL(E)$.

b) Soit $\lambda \in K$, on pose $E_\lambda = \{X \in E \ / \ f(X) = \lambda X\}$. Montrez que E_λ est réduit à $\{0_E\}$ en général, sauf pour trois valeurs de λ qu'on note $k_1 < k_2 < k_3$.

c) Pour $i \in \{1,2,3\}$, choisissez une base de E_{k_1}, E_{k_2}, E_{k_3} et montrez qu'en réunissant ces trois bases, on obtient une base $\mathscr{B}$ de E.

d) Si X est un vecteur de coordonnées (a,b,c) dans cette base $\mathscr{B}$, donnez les coordonnées de $f(X)$ dans la base $\mathscr{B}$.

e) Justifiez que $f^3 = f \circ f \circ f$ est combinaison linéaire de Id_E, f, f^2.

f) Montrez que f^{-1} est combinaison linéaire de Id_E, f, f^2.

****8)**

a) Pour $P \in K[X]$, on pose $u(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrez que $u \in \mathscr{L}(K[X])$ et déterminez $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$.

b) Pour $P \in K[X]$, on pose $v(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$. Mêmes questions.

c) Soit $a \in K$ fixé. Pour $P \in K[X]$, on pose $f(P) = P(X+a) + P(X)$. Montrez que $f \in GL(K[X])$.

****9)** On pose $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$, on pose $f(P) = (X^2-1)P' - 2XP(X)$.

a) Montrez que $f \in \mathscr{L}(E)$.

b) Montrez que si $P \in \operatorname{Ker} f$, alors $X^2 - 1$ divise P. Déduisez-en $\operatorname{Ker} f$.

c) Montrez que $\operatorname{Im} f = \{Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ Q(1) = Q'(1)\}$.

d) Déterminez les scalaires λ tels que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id_E}) \neq \{0\}$.

****10)** On pose $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$, on pose $f(P) = (X^2-1)P' - XP(X)$.

a) Montrez que $f \in \mathscr{L}(E)$ et déterminez $\operatorname{Ker}(f)$ et une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$. f est-elle surjective ?

b) Déterminez les scalaires λ tels que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id_E}) \neq \{0\}$.

***11)** Soient E, F, G trois K-e.v et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

Montrez que $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$

****12)** Soit E, F, G 3 $K-$e.v, $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G)$.

a) Montrez que $\mathrm{Ker}\, g \circ f = \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.

b) Montrez que $\mathrm{Im}\, g \circ f = \mathrm{Im}\, g \iff \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f = F$.

****13)** Soit E un K-e.v. et f un endomorphisme de E. Pour $\lambda \in K$, on pose $E_\lambda = \{x \in E \;/\; f(x) = \lambda x\}$.

a) Montrez que E_λ est un s.e.v. de E.

b) Montrez par récurrence sur n que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont n scalaires distincts, alors les s.e.v. E_{λ_i} sont en somme directe.

****14)** Soit E, F deux K-e.v., $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On dit que $g \in \mathscr{L}(F,E)$ est un inverse à droite de f quand $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$.

a) Montrez que si f possède deux inverses à droite différents, alors f en possède une infinité.

b) Montrez que si f possède un unique inverse à droite, alors f est un isomorphisme (vous admettrez l'existence d'un supplémentaire de tout s.e.v.)

***15)** Soit $E = K^3$. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$$

Vérifiez que f est un projecteur et donnez ses éléments caractéristiques (noyau et image).

****16)** Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $F = \mathrm{vect}((1,-1,2))$ parallèlement à $G = \{(x,y,z) \;/\; 3x - 2y = 0\}$.

Déterminez l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par p et déterminez l'expression analytique de p.

***17)** Soit E un K-e.v., $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrez que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par u si et seulement si u commute avec p.

***18)** Soit E un K-e.v., p et q deux projecteurs de E. Montrez que :

$$p \circ q = p \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p) \qquad\qquad p \circ q = q \Leftrightarrow \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$$

****19)** Soit E un K-e.v., p et q deux projecteurs de E.

a) Montrez que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$

b) Dans ce cas, montrez alors que : $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

****20)** Soit E un K-e.v., p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$.

Montrez que r est un projecteur et précisez ses éléments caractéristiques.

****21)** Soit E un K-e.v. On suppose qu'il existe $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

a) Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$.

b) Déduisez-en que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(g^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $L(E)$.

****22)** Soit $E = C^0(\mathbb{R})$. Montrez que les applications φ, ψ suivantes sont des endomorphismes de E, et déterminez leur image et noyau.

a) $\varphi(f) = g$, où $g(x) = x f(x)$.

b) $\psi(f) = g$, où $g(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\mathrm{d}t$.

****23)** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, résoudre l'équation $x + a f(x) = u$ d'inconnue $x \in E$.

*****24)** Soit E un K-e.v., A, B deux s.e.v. de E supplémentaires. Soit $G = \{f \in L(E) / \mathrm{Im}\, f = A \text{ et } \mathrm{Ker}\, f = B\}$.

a) Montrez que G est stable par $\circ$.

b) Soit e le projecteur sur A parallèlement à B. Montrez que pour tout $f \in G$, $e \circ f = f \circ e = f$.

c) Montrez que pour tout $f \in G$, il existe $g \in G$ tel que $f \circ g = g \circ f = e$.

d) Que pouvez-vous dire de $(G, \circ)$?