Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires

1.1 Définition et propriétés immédiates

Définition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,

— Une application linéaire de E dans F est une fonction $f\colon E \to F$ telle que

$$\begin{array}{ll} \forall (u,v) \in E^2 & f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \forall u \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{K} & f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{array}$$

— Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E (application linéaire dans le cas particulier où $F = E$).

— On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Remarque. Ne pas dire « f est stable par combinaison linéaire » : seuls les ensembles de vecteurs peuvent être stables par une opération, pas les fonctions.

Comme dans la caractérisation des s.e.v., on peut remplacer les deux propriétés de la définition par une seule :

$$\forall (u,v) \in E^2\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda\, u + v) = \lambda\, f(u) + f(v)$$

Exemples.

— Les applications suivantes sont linéaires

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, y-z) \end{array} \ ; \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \ ;$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \ ; \quad \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$$

— Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'application nulle $\quad u \mapsto 0_F \quad$ est une application linéaire.

— L'identité de E, les homothéties de rapport $k \quad u \mapsto k\,u \quad$ (où k est un scalaire non nul) sont des endomorphismes de E.

On déduit de la définition les quelques règles de calculs suivantes.

Proposition 1. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ (f est une application linéaire de E dans F). Alors :*

▷ $f(0_E) = 0_F$.

▷ $\forall u \in E, \quad f(-u) = -f(u)$.

▷ $\forall (u_1,\dots,u_n) \in E^n,\ \forall (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, f(u_k)$.

Proposition 2. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathscr{B}$ une base de E et $v_1,\dots,v_p$ des vecteurs de F.*
À tout vecteur x de E, on associe ses coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, puis on définit $f : E \to F$ par une relation du type $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_1,\dots,x_n) v_i$.
Si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\varphi_i(x_1,\dots,x_n)$ est une combinaison linéaire (à coeff. constants) de $x_1,\dots,x_n$, alors f est linéaire.

Exercices :

1) Montrez que $f : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $f(P) = X^3 P(1/X) - P'$ est linéaire.

2 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

2.1 Noyau et image d'une application linéaire

Définition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F.

— On appelle noyau de f l'ensemble des antécédents du vecteur nul de F par l'application f. On le note $\mathrm{Ker}(f)$. Formellement :
$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{u \in E \ / \ f(u) = 0_F\right\}.$$

— On appelle image de f l'ensemble comportant toutes les images par f des vecteurs de E. On le note $\mathrm{Im}(f)$. Formellement :
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u), \ u \in E\}.$$

***Exercices* :**

1) Calculez $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ où $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, \ y, \ z) \mapsto (2x + y, \ y - z)$;
2) Même exercice avec $\Delta\colon \mathbb{C}_2[X] \to \mathbb{C}_2[X], \quad P \mapsto X\,P' - P$;
3) Même exercice avec $h_k\colon E \to E, \quad u \mapsto k\,u$ quand $k \neq 0$.

Proposition 3. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors*

- ▷ $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *;*
- ▷ $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* F*.*

Proposition 4 (Injectivité et surjectivité d'une application linéaire)**.** *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :*

- ▷ f *est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ *;*
- ▷ f *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$*.*

2.2 Image d'un s.e.v. par une application linéaire

Proposition 5. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E' un sous-espace vectoriel de E, f une application linéaire de E dans F.*
Alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 6. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.*
Alors $f\big(\operatorname{vect}((e_i)_{i\in I})\big) = \operatorname{vect}\big((f(e_i))_{i\in I}\big)$.
En particulier, $f\big(\operatorname{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)\big) = \operatorname{vect}\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big)$.

Cas particulier : si on connaît une base (ou simplement une famille génératrice de E), alors on connaît une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,f$.

***Exercices* :**

1) On appelle f l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même $P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\mathbb{K}_n[X]) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Déduisez-en que f est surjective. Est-elle bijective ?
2) Montrez de même que l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans lui même $P \mapsto P(X+1) + P(X)$ est linéaire et bijective.

2.3 Image réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire

Proposition 7. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, F' un sous-espace vectoriel de F, f une application linéaire de E dans F.*
Alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.4 Applications linéaires et sommes directes

Proposition 8. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tel que $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E$ et $f_1, \dots, f_n$ des applications linéaires de $E_1, \dots, E_n$ dans F respectivement.*
Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f|_{E_i} = f_i$.

Autrement dit, pour définir une application linéaire sur une somme directe de sous-espaces vectoriels, il suffit de la définir sur chacun des sous-espaces vectoriels.

Un cas particulier très important : le cas des bases.

Proposition 9. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, tels que E possède une base $(e_1, \dots, e_p)$. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de p vecteurs de F.*
Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = v_i$.

Autrement dit, pour définir une application linéaire sur un e.v. muni d'une base, il suffit de la définir sur chacun des vecteurs de la base.

***Exercices* :**

1) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}$. Reconnaissez l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f(1) = 1$, $f(X) = 2$, $f(X^2) = 4$.
2) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = E$. Reconnaissez l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f(1) = 1$, $f(X) = X$, $f(X^2) = -2$.

3 Isomorphismes et automorphismes

Définition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- Un isomorphisme de E dans F est une application $f : E \to F$ qui est linéaire et bijective.
- Un automorphisme de E est une application $f : E \to E$ (l'espace d'arrivée est le même que l'espace de départ) qui est linéaire et bijective.
- L'ensemble des automorphismes de E est appelé groupe linéaire de E et il est noté $\mathrm{GL}(E)$.

Remarque. Un automorphisme est donc une application qui est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

$f \in \mathrm{GL}(E)$ signifie que f est un automorphisme de E : c'est une application linéaire bijective de E dans E.

Quand f est un isomorphisme de E dans F, on peut parler de sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$.

Exemples.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X], \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto -z\,X^2 + y\,X + 2x - 3z$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
- L'identité de E, et plus généralement toutes les homothéties de rapport $k \neq 0$ de E sont des automorphismes de E.

***Exercices* :**

1) Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des suites récurrentes linéaires réelles u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 2\,u_n$.
On pose l'application $\Phi : \begin{array}{l} \mathscr{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \longmapsto (u_0, u_1). \end{array}$
Montrez que Φ est un isomorphisme de $\mathscr{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 10. *La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.*
La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

Proposition 11. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\quad f \in \mathscr{L}(E, F)$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*
- *f est un isomorphisme de E dans F ;*
- *f transforme une base particulière $\mathscr{B}_0$ de E en une base de F ;*
- *f transforme toutes les bases de E en des bases de F.*

Proposition 12. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*
Si $g \in \mathscr{L}(F,E)$ vérifie $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est un isomorphisme et $f^{-1} = g$.

4 Opérations sur les applications linéaires

Dans tout ce paragraphe, E, F, G et H désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels quelconques.

Proposition 13 (Somme et produit par un scalaire d'applications linéaires)**.** *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

- *$f+g$ est une application linéaire : $f+g \in \mathscr{L}(E,F)$.*
- *$\lambda \,.\, f$ est une application linéaire : $\lambda \,.\, f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

Corollaire 1. *$\mathscr{L}(E,F)$ muni des opérations $+$ et $\mathbb{K}.$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Cela signifie qu'en ce qui concerne les opérations $+$ et ., on calcule avec les applications linéaires comme s'il s'agissait de vecteurs.

Toutefois, on ne peut additionner deux applications linéaires que si leurs espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes !

Remarque. Le vecteur nul de $\mathscr{L}(E,F)$ est l'application nulle $0_{\mathscr{L}(E,F)} : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & 0_F. \end{array}$

On peut aussi composer deux applications linéaires lorsque leurs espaces de départ et d'arrivée s'enchaînent bien.

Proposition 14 (Composée d'applications linéaires)**.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Remarque. Par convention, on décide que la composition est une opération prioritaire sur l'addition et le produit externe : $\lambda \,.\, f \circ g + h$ signifie $\big(\lambda \,.\, (f \circ g)\big) + h$.

Proposition 15.

- *La composition est associative :*

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F) \quad \forall g \in \mathscr{L}(F,G) \quad \forall h \in \mathscr{L}(G,H) \quad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

- *Les applications identités sont neutres pour la composition :*

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F) \quad \mathrm{Id}_F \circ f = f \ \text{ et } \ f \circ \mathrm{Id}_E = f.$$

- *La composition se distribue à gauche et à droite sur l'addition :*

$$\forall (f,g) \in \big(\mathscr{L}(E,F)\big)^2 \quad \forall h \in \mathscr{L}(F,G) \quad h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g,$$
$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F) \quad \forall (g,h) \in \big(\mathscr{L}(F,G)\big)^2 \quad (h+g) \circ f = h \circ f + g \circ f.$$

- *La composition commute avec le produit externe :*

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F) \quad \forall g \in \mathscr{L}(F,G) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (\lambda \,.\, g) \circ f = \lambda \,.\, (g \circ f) = g \circ (\lambda \,.\, f).$$

Pour les applications linéaires, $+$ et $\circ$ se comportent comme $+$ et $\times$ pour les nombres, à trois limitations importantes près :

- On ne peut pas toujours composer une application par elle-même ;
- La composition n'est pas commutative : la plupart du temps $f \circ g \neq g \circ f$.
- Il existe des couples de diviseurs de zéro, c'est-à-dire qu'il existe des couples (f,g) d'applications linéaires tels que $f \neq 0$, $g \neq 0$ et $g \circ f = 0$.

4.1 Cas particulier des endomorphismes

Proposition 16. *D'après les règles de calcul précédentes, $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif et non intègre.*
L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ est son groupe des inversibles.

Quand on parle de l'anneau $\mathscr{L}(E)$ sans plus de précisions, on sous-entend bien sûr pour les opérations précédentes.
Les endomorphismes peuvent en particulier être composés avec eux-mêmes.

Définition. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f^n par

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque. $f^2(u)$ vaut $f \circ f(u) = f\big(f(u)\big)$ et non $\big(f(u)\big)^2$ qui n'a aucun sens !

Exemple. Si $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{C}[X])$ est la dérivation, calcul de $(\Delta^2 - 2\,\Delta + 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]})(P)$.
***Exercices* :**

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que

$$f^3 + 4\,f^2 + 2\,f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0.$$

Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et proposer une expression de f^{-1}.

Définition. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(f)$ l'endomorphisme $\sum_{i=0}^{n} a_i f^i$.

Les opérations sur les polynômes sont compatibles avec celles sur les endomorphismes.

Proposition 17. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

- ▷ $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$
- ▷ $(\lambda P)(f) = \lambda P(f)$
- ▷ $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

5 Projecteurs et symétries

5.1 Projecteurs

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B deux s.e.v. de E, supplémentaires dans E.
À tout vecteur v de E, on associe un unique couple $(a, b) \in A \times B$ tel que $v = a + b$.
On pose $p : E \to E$ définie par $p(v) = a$: l'application p est appelée projecteur sur A parallèlement à B.

Les projecteurs ont des propriétés remarquables.

Proposition 18. *Avec les mêmes notations, on montre que*

- ▷ *p est un endomorphisme de E*
- ▷ $\mathrm{Ker}\, p = B$ *et* $\mathrm{Im}\, p = A$
- ▷ *un vecteur v est invariant par p (*i.e.* $p(v) = v$) si et seulement si $v \in A$*
- ▷ $p \circ p = p$

On a même une sorte de réciproque

Proposition 19. *Soit p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.*
Alors $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ et p est un projecteur : c'est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Remarque. Si on note q le projecteur sur B, parallèlement à A, alors $p + q = \mathrm{Id}_E$: on dit que p et q sont des projecteurs associés.

Exercices :

1) Soit a, b, c, d 4 scalaires. À quelle condition l'application $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ est-elle un projecteur de $\mathbb{K}^2$?
2) Montrez que l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ définie par

$$f(P) = P(0) + \left(2P(1) - \frac{3}{2}P(0) - \frac{1}{2}P(2)\right) X + \left(\frac{P(2) + P(0)}{2} - P(1)\right) X^2$$

est un projecteur.

5.2 Symétries

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B deux s.e.v. de E, supplémentaires dans E.
À tout vecteur v de E, on associe un unique couple $(a, b) \in A \times B$ tel que $v = a + b$.
On pose $s : E \to E$ définie par $s(v) = a - b$: l'application s est appelée symétrie de base A parallèlement à B.

Les symétries ont des propriétés remarquables, comme les projecteurs.

Proposition 20. *Avec les mêmes notations, on montre que*

- ▷ *s est un automorphisme de E et $s^{-1} = s$*
- ▷ *A est l'ensemble des vecteurs invariants par s et B celui des vecteurs anti-invariants*
- ▷ *$s \circ s = \mathrm{Id}_E$*

On a de même une sorte de réciproque

Proposition 21. *Soit s un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.*
Alors s est une symétrie.

Remarque. Si on note p le projecteur sur A, parallèlement à B, alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$: on dit que p et s sont associés.
La symétrie de base B parallèlement à A est $-s$.