Mp2i - Programme de colles 21

Semaine du 18 au 23 mars 2022

1 Espaces vectoriels sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

a) Définition : ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire vérifiant huit propriétés ; exemples fondamentaux : vecteurs géométriques, K, K^n, $K[X]$, $K^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{F}(X,K)$. Propriétés de calcul dans un K-e.v.

b) Sous-espaces vectoriels. Comment montrer qu'un ensemble est un K-e.v. Intersection de s.e.v, exemple : ensemble des solutions d'un système linéaire scalaire homogène.

c) Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, s.e.v. engendré par une famille finie. Familles génératrices. Opérations sur les vecteurs d'une famille génératrice.

d) Familles (finies) libres ou liées : définitions, propriétés usuelles. Exemple classique : famille de polynômes étagée en degré.

e) Bases (finies) d'un e.v. : définition, coordonnées dans une base.

f) Généralisation des définitions précédentes à des familles infinies de vecteurs.

g) Somme de s.e.v. (en nombre fini), somme directe. Cas particulier de deux s.e.v. : caractérisation d'une somme directe par l'intersection, définition de deux s.e.v. supplémentaires.

2 Applications linéaires

a) Applications linéaires : définition, propriétés, endomorphismes.

b) Noyau, lien avec l'injectivité ; image d'un s.e.v., image d'une application linéaire, image d'un s.e.v. dont on connaît une famille génératrice ; image réciproque d'un s.e.v. Pour définir une application linéaire sur une somme directe, il suffit de la définir sur chaque sous-espace de la somme. Cas particulier d'une base.

c) Opérations sur les app. linéaires, iso-, automorphismes. Espaces vectoriels $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(E)$, anneau $\mathscr{L}(E)$, groupe $GL(E)$, polynômes d'endomorphismes.

d) Projecteurs et symétries.

Démonstrations à connaître

— une famille de polynômes étagés en degré est libre (prop. 17)
— caractérisation des isomorphismes par image d'une base (prop. 11)
— caractérisation des projecteurs (prop. 19)