

L'usage des calculatrices est autorisé.

Rappelez-vous tout ce qui a été dit lors de la correction des DS précédents! N'oubliez pas que le concepteur du sujet est votre ami, mais pas le correcteur! Lisez donc l'énoncé attentivement, vérifiez la cohérence de vos résultats à l'aide de l'énoncé et rédigez soigneusement sans vouloir tout faire et sans étourderie.

**Exercice**

On souhaite définir une suite par récurrence en prenant  $u_0$  dans  $]1, +\infty[$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{\ln u_n}$ .

- On pose  $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ . Dressez le tableau de variations de  $f$ , précisez  $f(]1, +\infty[)$  et déduisez-en que la définition précédente est correcte, c'est-à-dire que la suite  $u$  est bien définie et à termes dans  $]1, +\infty[$ . Soyez même plus précis : que peut-on dire des termes de la suite  $u$  à partir du rang 1?
- Calculez  $f''(x)$  pour  $x > 1$ , précisez la convexité de  $f$  sur  $[e, +\infty[$  et donnez un réel  $a \in [0, 1[$  tel que  $|f'| \leq a$  sur  $[e, +\infty[$ .
- Justifiez que la suite  $u$  converge vers  $e$ .

**Exercice**

Soit  $a$  un réel non nul. On pose  $P = a(X+1)^4 - X$ .

- Montrez que la seule valeur de  $a$  pour laquelle  $P$  possède une racine multiple est  $a = \frac{27}{256}$ . Quelle est la valeur de la racine multiple dans ce cas? Quel est son ordre de multiplicité?
- Dans le cas où  $a = \frac{27}{256}$ , factorisez  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Problème 1 - Polynômes****Partie 1 - Ensemble des racines**

Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ , on note  $Z(P)$  l'ensemble des racines (dans  $\mathbb{C}$ ) de  $P : Z(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0\}$ .

**Question 1)** Dans chacun des cas suivants, déterminez  $Z(P)$  :

$$P = X^2 + X + 1; \quad P = X^3 - X^2 - X + 1; \quad P = X^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

**Question 2)** On note  $\mathcal{P}_f(\mathbb{C})$  l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{C}$ . Le symbole  $Z$  définit donc une application  $\mathbb{C}[X]^* \rightarrow \mathcal{P}_f(\mathbb{C})$ .

- L'application  $Z$  est-elle injective?
- Si  $E = \{a_1, \dots, a_n\}$  est une partie finie de  $\mathbb{C}$  à  $n$  éléments, précisez les antécédents de  $E$  par l'application  $Z$  (s'il y en a). L'application  $Z$  est-elle surjective?

**Question 3)** Soit  $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$ ,  $A$  et  $B$  non nuls.

- Justifiez que si  $A$  divise  $B$ , alors  $Z(A) \subset Z(B)$ . La réciproque est-elle vraie?
- On pose  $P = AB$ . Quelle relation y-a-t-il entre  $Z(P)$ ,  $Z(A)$  et  $Z(B)$ ?
- Complétez la phrase suivante (en la justifiant, bien sûr) :

$$Z(A) \cap Z(B) = \emptyset \text{ si et seulement si } A \text{ et } B \text{ sont } \dots$$

**Partie 2**

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul,  $\omega = e^{2i\pi/n}$  et  $P = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ .

L'objectif est de montrer le résultat suivant (proposition \*) :

si  $A$  et  $B$  sont deux polynômes **unitaires** (*i.e.* de coefficient dominant 1) et **à coefficients dans**  $\mathbb{R}_+$  tels que  $P = AB$ , alors les coefficients de  $A$  et  $B$  sont tous dans  $\{0, 1\}$ .

**Question 1)** Montrez que ce résultat est vrai si  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  (on pourra considérer les degrés de  $A$  et  $B$ ).

**Question 2)** Montrez que  $P$  se factorise dans  $\mathbb{C}[X]$  sous la forme  $P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k)$ .

Dans la suite de cette partie,  $A, B$  sont deux polynômes qui satisfont les hypothèses de la proposition \*. On note  $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  et  $B = \sum_{k=0}^q b_k X^k$  ( $p, q$  étant leurs degrés respectifs) : les coefficients sont donc des réels positifs et  $a_p = b_q = 1$ . Comme il se doit, si  $k > p$ , alors  $a_k = 0$  et si  $k > q$ ,  $b_k = 0$ .

Évidemment,  $A$  et  $B$  jouant le même rôle dans cette étude, tout ce qui sera démontré à propos du polynôme  $A$  restera valable pour le polynôme  $B$ .

**Question 3)**

- Montrez que si  $z$  est une racine de  $A$ , alors  $z$  est une racine simple de module 1 et  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  est aussi une racine de  $A$ .
- Rappelez sans démonstration le lien entre  $a_0$  et le produit des racines de  $A$ . Déduisez-en que  $a_0 = 1$ .

**Question 4)** On pose  $\hat{A} = X^p A(1/X)$ .

- Justifiez que  $\hat{A}$  est encore un polynôme, puis donnez ses coefficients en fonction de ceux de  $A$ .
- Montrez que  $A$  et  $\hat{A}$  ont les mêmes racines. Déduisez-en l'égalité  $A = \hat{A}$ , puis  $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_{p-k} = a_k$ .

**Question 5)**

- Montrez que  $\sum_{k=0}^p b_k a_{p-k} = 1$ , puis  $\sum_{k=1}^p b_k a_k = 0$ .
- Déduisez-en que pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_k = 0$  ou  $b_k = 0$ , puis que cette propriété reste valable pour tous les entiers  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

**Question 6)** Pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on pose  $\mathcal{A}(k)$  le prédicat «  $a_k$  et  $b_k$  sont dans  $\{0, 1\}$  ».

- Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On suppose que les propositions  $\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(1), \dots, \mathcal{A}(k-1)$  sont vraies.

$$\text{Montrez alors que } a_k + b_k = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{k-j} b_j.$$

Déduisez-en que  $a_k + b_k$  est un entier relatif plus petit que 1, puis que  $a_k + b_k \in \{0, 1\}$ , enfin que  $a_k$  et  $b_k$  sont dans  $\{0, 1\}$ .

- Concluez cette question en montrant que la proposition \* est vraie.

La proposition \* est donc démontrée. Il reste cependant une question : est-il vraiment possible d'écrire  $P = AB$  avec les hypothèses de la proposition \* ?

**Question 7)**

- Montrez que si  $n$  est un nombre premier, alors la seule façon d'écrire  $P = AB$  est de prendre  $A = 1$  ou  $B = 1$ .
- Montrez qu'au contraire, si  $n$  n'est pas premier, on peut trouver deux polynômes  $A$  et  $B$  non constants tels que  $P = AB$ .

## Problème 2

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On note  $A = f(1)$ . On pose alors  $u_n = \cos(f(n))$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

L'objectif de ce problème est de montrer que si  $f$  vérifie certaines conditions, alors pour tout  $a \in [-1, +1]$ , il existe une sous-suite de  $u$  qui converge vers  $a$ .

Dans toute la suite, on suppose :

- $f$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$ ;
- pour tout  $x \geq 1, f'(x) > 0$ ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

**Question 1)** D'abord, on justifie que le problème n'est pas insensé : pourquoi est-on sûr qu'il existe au moins un réel  $a \in [-1, +1]$  et une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  qui converge vers  $a$  ?

**Question 2)** Donnez au moins deux exemples de fonctions  $f$  qui vérifient les hypothèses.

**Question 3)** Justifiez que  $f$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  dans  $[A, +\infty[$ , que sa réciproque  $g$  est dérivable sur  $[A, +\infty[$  et que  $\lim_{+\infty} g = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} g' = +\infty$ .

Soit désormais  $a \in [-1, +1]$ . On pose  $t = \arccos(a) \in [0, \pi]$ .

**Question 4)**

- Montrez que la suite  $(g(t + 2n\pi))$  est définie à partir d'un certain rang  $n_0$ .
- Pour  $n \geq n_0$ , justifiez l'existence d'un entier  $\varphi(n) \geq 1$  tel que  $f(\varphi(n)) \leq t + 2n\pi < f(\varphi(n) + 1)$ .

**Question 5)**

- Soit  $x, y$  deux réels tels que  $1 < y - x$ . Montrez que  $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$ .
- Montrez que pour tout  $n \geq n_0$ , il existe  $c_n \in ]t + 2n\pi, t + 2(n+1)\pi[$  tel que  $g(t + 2(n+1)\pi) - g(t + 2n\pi) = 2\pi g'(c_n)$ .  
Déduisez-en  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(t + 2(n+1)\pi) - g(t + 2n\pi))$ .
- Montrez alors qu'il existe un rang  $n_1 \geq n_0$  tel que la suite  $(\varphi(n))$  soit strictement croissante à partir du rang  $n_1$ .

Comme la suite  $(\varphi(n))$  est une suite d'entiers naturels strictement croissante à partir du rang  $n_1$ , elle diverge donc vers  $+\infty$ .

**Question 6)**

- Montrez que pour tout  $n \geq n_1$ , il existe  $d_n \in ]\varphi(n), \varphi(n) + 1[$  tel que  $f(\varphi(n) + 1) - f(\varphi(n)) = f'(d_n)$ .
- Montrez alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t + 2n\pi - f(\varphi(n))) = 0$ .

**Question 7)** Concluez : montrez qu'il existe une sous-suite de la suite  $u$  qui converge vers  $a$ .

**Question 8)** On voudrait représenter graphiquement les termes de la suite  $u$  : pour cela, on calcule de manière approchée grâce à un ordinateur un très grand nombre de termes, on affiche sur son écran la droite réelle en noir et on allume en rouge les points de coordonnées  $(u_n, 0)$ . Que va-t-on très certainement obtenir ?

## Devoir surveillé 7 - Corrigé

### Exercice

a)  $f$  est clairement définie et de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ , comme quotient de telles fonctions.

Pour  $x > 1$ ,  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ . Le signe de  $\ln x - 1$  est facile à déterminer, et les limites aux bornes aussi (en  $+\infty$ , par comparaison asymptotique classique).

$x$	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	e	$+\infty$

$f$  étant continue, l'image de  $]1, +\infty[$  est l'intervalle  $[e, +\infty[$  d'après le th. des valeurs intermédiaires. Donc comme  $[e, +\infty[$  est inclus dans  $]1, +\infty[$ , l'intervalle  $]1, +\infty[$  est stable par  $f$ . Puisque  $u_0$  appartient à cet intervalle, on en déduit que la suite  $u$  est bien définie et à valeurs dans  $]1, +\infty[$ .

De plus, on a aussi montré qu'à partir du rang 1, la suite est à termes dans  $[e, +\infty[$ .

b) Pour  $x > 1$ ,  $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$ , donc comme  $2 - \ln x \geq 0 \iff e^2 \geq x$ , on en déduit que  $f$  est convexe sur  $]1, e^2]$  et concave sur  $[e^2, +\infty[$ .

Le tableau de variations de  $f'$  sur  $[e, +\infty[$  est le suivant (limite en  $+\infty$  facile à calculer :  $f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$ ) :

$x$	e	e <sup>2</sup>	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	0	1/4	0

Sur  $[e^2, +\infty[$ ,  $f'$  est positive et majorée par  $1/4$ , donc  $|f'| \leq \frac{1}{4}$ .

c) La fonction  $f$  est donc contractante sur l'intervalle  $[e, +\infty[$  et a un point fixe unique qui est  $e$ , donc comme à partir du rang 1, la suite  $u$  est dans  $[e, +\infty[$ , d'après un th. du cours, elle converge vers  $e$ .

### Exercice

a) Si  $P$  possède une racine multiple  $z$ , alors  $P(z) = P'(z) = 0$ , ce qui donne  $z = a(z+1)^4$  et  $4a(z+1)^3 = 1$ , donc  $4z = 4a(z+1)^4 = 4a(z+1)^3 \times (z+1) = z+1$ , donc  $z = \frac{1}{3}$  et  $a = \frac{1}{4(z+1)^3} = \frac{27}{256}$ .

Réciproquement, si  $a = \frac{27}{256}$ , on vérifie aisément que les deux équations  $P(z) = 0$  et  $P'(z) = 0$  ont pour racine commune  $\frac{1}{3}$  (il suffit de faire le calcul!).

De plus,  $P'' = 12a(X+1)^2$  a pour unique racine  $-1$  donc  $P''(1/3) \neq 0$  donc  $z$  est racine double.

b) On sait donc que  $\left(X - \frac{1}{3}\right)^2$  divise  $P$  : il existe  $Q$  polynôme de degré 2 tel que  $P = \frac{27}{256} \left(X - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot Q$ .

$Q$  a trois coefficients dont le dominant qui vaut 1 et le constant qui vaut 9 (pour avoir le bon coefficient constant dans  $P$ ). En étudiant les coefficients de degré 3 des deux côtés, on trouve que  $Q = X^2 + \frac{14}{3}X + 9$ , polynôme sans racines réelles.

Donc la factorisation irréductible de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est

$$P = \frac{27}{256} \left(X - \frac{1}{3}\right)^2 \times \left(X^2 + \frac{14}{3}X + 9\right)$$

puis en calculant les racines complexes de  $Q$ , celle dans  $\mathbb{C}[X]$  est

$$P = \frac{27}{256} \left(X - \frac{1}{3}\right)^2 \times \left(X + \frac{7 - 4i\sqrt{2}}{3}\right) \times \left(X + \frac{7 + 4i\sqrt{2}}{3}\right)$$

## Problème 1

### Partie 1

**Question 1)**  $Z(X^2 + X + 1) = \{j, j^2\}$ ;  $Z(X^3 - X^2 - X + 1) = \{-1, 1\}$ ;  $Z(X^n - 1) = \{e^{2ik\pi/n} / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ .

### Question 2)

- a) L'application  $Z$  n'est pas injective, car  $Z(x-1) = \{1\} = Z((x-1)^2)$ .  
 b) Les antécédents de  $E$  par  $Z$  sont les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  qui ont pour racines les nombres  $a_1, \dots, a_n$  :

$$Z^{-1}(E) = \left\{ \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k)^{\alpha_k} / \lambda \in \mathbb{C}^*, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{*n} \right\}$$

Connaissant des nombres (en quantité finie), on peut toujours construire un polynôme qui les a pour racines, donc  $Z$  est surjective.

### Question 3)

- a) Si  $A$  divise  $B$ , alors il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $B = AQ$  donc pour tout  $z \in Z(A)$ ,  $B(z) = Q(z)A(z) = Q(z) \times 0 = 0$  donc  $z \in Z(B)$ , donc ceci prouve l'inclusion  $Z(A) \subset Z(B)$ .  
 La réciproque est fautive :  $Z((X-1)^2) = \{1\} \subset Z(X-1)$  et pourtant  $(X-1)^2$  ne divise pas  $X-1$ .  
 b)  $P = AB$ , donc  $A$  et  $B$  divisent  $P$  donc d'après a,  $Z(A) \subset Z(P)$  et  $Z(B) \subset Z(P)$ , donc  $Z(A) \cup Z(B) \subset Z(P)$ .  
 Réciproquement, si  $z \in Z(P)$ , alors  $A(z)B(z) = 0$  donc ( $\mathbb{C}$  est intègre)  $A(z) = 0$  ou  $B(z) = 0$  donc  $z \in Z(A) \cup Z(B)$ .  
 Au total,  $Z(AB) = Z(A) \cup Z(B)$ .  
 c) Si  $A$  et  $B$  ne sont pas premiers entre eux, alors leur p.g.c.d.  $D$  est un polynôme non constant, donc qui possède une racine  $z$  d'après le th. de d'Alembert-Gauss. Or  $D$  divise  $A$  et  $B$  donc  $Z(D) \subset Z(A)$  et  $Z(D) \subset Z(B)$ , donc  $z \in Z(A) \cap Z(B)$ , donc  $Z(A) \cap Z(B) \neq \emptyset$ .  
 Réciproquement, si  $Z(A) \cap Z(B) \neq \emptyset$ , alors  $A$  et  $B$  ont une racine commune  $z$ , donc  $X - z$  divise  $A$  et  $B$ , donc divise le p.g.c.d.  $D$  de  $A$  et  $B$ , donc  $D$  n'est pas constant, donc  $A$  et  $B$  ne sont pas premiers entre eux.  
 Ceci prouve l'équivalence :  $Z(A) \cap Z(B) \neq \emptyset$  si et seulement si  $A$  et  $B$  ne sont pas premiers entre eux.  
 Donc par négation,  $Z(A) \cap Z(B) = \emptyset$  si et seulement si  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

### Partie 2

**Question 1)** Si  $n = 1$ , alors  $P = 1$  donc les seuls diviseurs de  $P$  sont les constantes non nulles, donc le seul polynôme unitaire divisant  $P$  est 1.

Si  $n = 2$ , alors  $P = X + 1$  donc les seuls diviseurs de  $P$  sont les constantes non nulles et les associés de  $P$ , donc la seule constante unitaire divisant  $P$  est 1 et le seul diviseur unitaire associé de  $P$  est lui-même.

Si  $n = 3$ , alors  $P = X^2 + X + 1$ , qui est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  (discriminant strictement négatif) donc les seuls diviseurs réels de  $P$  sont les constantes non nulles et les associés de  $P$ , donc la seule constante unitaire divisant  $P$  est 1 et le seul diviseur unitaire associé de  $P$  est lui-même.

Si  $n = 4$ , alors  $P = X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)$ ; ceci est la factorisation irréductible de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  donc les seuls diviseurs réels de  $P$  sont les constantes non nulles, les associés de  $X + 1$ , les associés de  $X^2 + 1$  et les associés de  $P$ , donc la seule constante unitaire divisant  $P$  est 1, le seul associé unitaire de  $X + 1$  est  $X + 1$ , de même pour  $X^2 + 1$  et le seul diviseur unitaire de  $P$  est lui-même.

Dans chacun des cas, les polynômes trouvés sont bien à coefficients dans  $\{0, 1\}$ .

**Question 2)** On note que  $(X-1)P = X^n - 1$  donc comme  $X-1$  et  $P$  sont premiers entre eux (pas de racines communes), d'après la partie 1,  $Z(X-1) = \{1\}$  et  $Z(P)$  forment deux parties complémentaires dans

$$Z(X^n - 1) = \{e^{2ik\pi/n} / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\} = \{\omega^k / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}, \text{ donc } Z(P) = \{\omega^k / k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}.$$

Comme  $P$  est de degré  $n-1$  et qu'on a trouvé  $n-1$  racines distinctes de  $P$ , elles sont donc simples et comme  $P$  est unitaire, on en déduit la factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  :  $P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k)$ .

### Question 3)

a) D'après la partie 1, les racines de  $A$  sont parmi les racines de  $P$ , qui sont des racines  $n$ -èmes de l'unité donc de module 1. De plus, les racines de  $P$  sont simples donc celles de  $A$  le sont aussi (sinon on aurait un facteur  $(X - z)^2$  dans  $A$  qui serait alors aussi facteur dans  $P$ ).

De plus, comme  $A$  est à coefficients réels, le conjugué de toute racine de  $A$  est encore racine de  $A$  d'après le cours.

b)  $A$  est de degré  $p$  et unitaire, donc le produit de ses racines est  $(-1)^p \frac{a_0}{1} = (-1)^p a_0$ . Or toutes les racines sont de module 1 donc  $|a_0| = 1$ , et comme  $a_0$  est un réel positif, on en déduit  $a_0 = 1$ .

#### Question 4)

a)  $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  donc  $\hat{A} = X^p \sum_{k=0}^p a_k X^{-k} = \sum_{k=0}^p a_k X^{p-k}$  : tous les exposants dans cette somme sont des entiers naturels, donc  $\hat{A}$  est un polynôme. Ses coefficients sont les mêmes que ceux de  $A$  mais rangés dans l'ordre inverse : par degré décroissant, ce sont  $a_0, a_1, \dots, a_p$  alors que ceux de  $A$  sont  $a_p, a_{p-1}, \dots, a_0$ .

b) D'après la question 3, si  $z$  est racine de  $A$ , alors  $\frac{1}{z}$  l'est aussi donc  $A(1/z) = 0$  donc  $\hat{A}(z) = z^p A(1/z) = 0$  donc  $z$  est racine de  $\hat{A}$ .

On peut remarquer que les deux polynômes  $A$  et  $\hat{A}$  jouent le même rôle, donc  $\hat{\hat{A}} = A$  donc en inversant les rôles de  $A$  et  $\hat{A}$ , on montre que les racines de  $\hat{A}$  sont aussi racines de  $A$ .

Donc  $A$  et  $\hat{A}$  ont les mêmes racines, avec les mêmes ordres de multiplicité (elles sont toutes simples) et de plus  $a_0 = 1$  donc  $A$  et  $\hat{A}$  sont unitaires, donc finalement,  $A$  et  $\hat{A}$  ont la même factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  donc sont égaux. Conclusion : ils ont les mêmes coefficients, donc  $(a_p, a_{p-1}, \dots, a_0) = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ , c'est-à-dire  $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_{p-k} = a_k$ .

#### Question 5)

a) Par définition du produit de deux polynômes,  $1 = \text{coeff}_p(P) = \text{coeff}_p(AB) = \sum_{k=0}^p \text{coeff}_k(B) \text{coeff}_{p-k}(A) = \sum_{k=0}^p b_k a_{p-k}$ .

D'après ce qui précède,  $1 = \sum_{k=0}^p b_k a_k = b_0 a_p + \sum_{k=1}^p b_k a_k$ , puis comme  $b_0 = 1 = a_p$ , on a  $\sum_{k=1}^p b_k a_k = 0$ .

b) La somme  $\sum_{k=1}^p b_k a_k$  est une somme de réels positifs et elle est nulle, donc tous ses termes sont nuls. Autrement dit, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_k = 0$  ou  $b_k = 0$ .

De même, en échangeant les rôles de  $A$  et  $B$ , on a aussi : pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket, a_k = 0$  ou  $b_k = 0$ .

Donc pour tout  $k \in \llbracket 1, \max(p, q) \rrbracket, a_k = 0$  ou  $b_k = 0$ , et comme après le rang  $\max(p, q)$ , on a  $a_k = b_k = 0$ , on a donc pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = 0$  ou  $b_k = 0$ .

#### Question 6)

a) On reprend la même idée :  $\text{coeff}_k(P) = \text{coeff}_k(AB) = \sum_{j=0}^k \text{coeff}_j(B) \text{coeff}_{k-j}(A)$  donc  $1 = \sum_{j=0}^k b_j a_{k-j}$ .

Or  $b_0 = 1$  et  $a_0 = 1$  donc  $1 = b_0 a_k + \sum_{j=1}^{k-1} b_j a_{k-j} + b_k a_0 = a_k + b_k + 1 = \sum_{j=1}^{k-1} b_j a_{k-j}$ , donc  $a_k + b_k = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{k-j} b_j$ .

Par hypothèse, les coefficients  $a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{k-1}$  sont dans  $\{0, 1\}$  donc ce sont des entiers positifs, donc  $a_k + b_k$  est un entier relatif inférieur ou égal à 1.

Mais  $a_k$  et  $b_k$  sont positifs, donc  $a_k + b_k$  l'est aussi, donc  $a_k + b_k \in \{0, 1\}$ .

Enfin, d'après la question 5, l'un des deux est nul donc l'autre vaut 0 ou 1, donc on a bien montré que  $a_k$  et  $b_k$  sont dans  $\{0, 1\}$ .

b) La sous-question précédente est la phase d'hérédité d'une récurrence forte, qui est évidemment initialisée car on a montré que  $a_0 = b_0 = 1$  en question 3. Donc d'après le principe de récurrence forte, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (a_k, b_k) \in \{0, 1\}^2$ .

La proposition \* est donc vraie.

#### Question 7)

a) On suppose que  $n$  est premier.

Si  $A, B$  sont tels que  $P = AB$  (sous-entendu avec les bonnes hypothèses sur  $A$  et  $B$ ), alors  $n = P(1) = A(1)B(1)$ .

Mais  $A(1)$  et  $B(1)$  sont une somme de 0 ou de 1 donc sont deux entiers naturels. Comme  $n$  est premier,  $A(1)$  ou  $B(1) = 1$ .

Par exemple, si  $A(1) = 1$ , alors  $A(1)$  ne peut être qu'une somme d'un seul terme 1, les autres valant 0, ce qui signifie que  $A$  est un monôme  $X^a$ . Or  $A$  divise  $P$  donc comme 0 n'est pas racine de  $P$ , on en déduit que  $a = 0$  donc  $A = 1$ .

b) On suppose que  $n$  n'est pas premier. Alors on peut écrire  $n = ab$  avec  $a, b$  deux entiers au moins égaux à 2.

$$X^n - 1 = (X - 1)P = X^{ab} - 1 = (X^a)^b - 1 = (X^a - 1) \times \left( \sum_{k=0}^{b-1} (X^a)^k \right) \text{ (égalité de Bernoulli).}$$

$$\text{Donc } P = \frac{X^a - 1}{X - 1} \times \left( \sum_{k=0}^{b-1} (X^a)^k \right) = \left( \sum_{k=0}^{a-1} X^k \right) \times \left( \sum_{k=0}^{b-1} X^{ak} \right) : \text{ on a trouvé une solution.}$$

Exemple : avec  $n = 12$ ,  $P = (X^2 + X + 1)(X^9 + X^6 + X^3 + 1)$ .

## Problème 2

**Question 1)** La suite  $u$  est bornée donc elle possède une sous-suite convergente d'après le th. de Bolzano-Weierstrass. Comme cette sous-suite est au sens large comprise entre  $-1$  et  $+1$ , par passage à la limite, sa limite l'est aussi.

**Question 2)** La fonction  $\ln$  et la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  sont deux exemples.

**Question 3)**  $f$  est dérivable donc continue sur  $[1, +\infty[$  et comme  $f' > 0$  sur  $[1, +\infty[$ ,  $f$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ . D'après le th. de bijection,  $f$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  dans  $[A, +\infty[$ .

De plus,  $f'$  ne s'annule pas sur  $[1, +\infty[$ , donc d'après le th. de dérivation d'une réciproque,  $g$  est dérivable sur  $[A, +\infty[$  et  $g' = \frac{1}{f' \circ g}$ .

$g$  est strictement croissante aussi sur  $[A, +\infty[$  donc elle a une limite réelle ou infinie en  $+\infty$  (th. de la limite monotone), mais comme elle est une bijection de  $[A, +\infty[$  dans  $[1, +\infty[$ , sa limite en  $+\infty[$  est donc  $+\infty$ .

Par composition des limites,  $f' \circ g$  a pour limite 0 en  $+\infty$  en restant positive donc  $g' = \frac{1}{f' \circ g}$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$ .

**Question 4)**

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t + 2n\pi = +\infty$  donc à partir d'un certain rang  $n_0$ , on a  $t + 2n\pi \geq A$ , donc la suite  $(g(t + 2n\pi))$  est définie à partir d'un certain rang  $n_0$ .

b) Pour  $n \geq n_0$ ,  $f(\varphi(n)) \leq t + 2n\pi < f(\varphi(n) + 1) \iff \varphi(n) \leq g(t + 2n\pi) < \varphi(n) + 1$ , car  $g$  est strictement croissante sur  $[A, +\infty[$ .

La double inégalité de droite nous dit ce qu'est  $\varphi(n)$  : la partie entière de  $g(t + 2n\pi)$ .

Et comme ce nombre est au moins égal à 1, sa partie entière l'est aussi.

**Question 5)**

a) Si  $1 < y - x$ , alors  $x + 1 < y$  donc comme la fonction partie entière est croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a  $\lfloor x + 1 \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ .

Or  $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$  donc  $\lfloor x \rfloor + 1 \leq \lfloor y \rfloor$ , donc  $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$ .

b) Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $g$  est continue sur  $[t + 2n\pi, t + 2(n + 1)\pi]$  et dérivable sur  $]t + 2n\pi, t + 2(n + 1)\pi[$  donc on peut appliquer le th. des acc. finis : il existe  $c_n \in ]t + 2n\pi, t + 2(n + 1)\pi[$  tel que  $g(t + 2(n + 1)\pi) - g(t + 2n\pi) = 2\pi g'(c_n)$ .

Or  $c_n > t + 2n\pi$  donc par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$ , or  $\lim_{+\infty} g' = +\infty$  donc par composition des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g'(c_n) = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (g(t + 2(n + 1)\pi) - g(t + 2n\pi)) = +\infty.$$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(t + 2(n + 1)\pi) - g(t + 2n\pi))$  donc à partir d'un certain rang  $n_1$ ,  $g(t + 2(n + 1)\pi) - g(t + 2n\pi) > 1$ , donc d'après a,  $\lfloor g(t + 2(n + 1)\pi) \rfloor > \lfloor g(t + 2n\pi) \rfloor$ , c'est-à-dire  $\varphi(n + 1) > \varphi(n)$ .

La suite  $(\varphi(n))$  est donc strictement croissante à partir du rang  $n_1$ .

**Question 6)**

a) Encore le th. de acc. finis !

b) D'après l'encadrement de la question 4b, on a  $0 \leq t + 2n\pi - f(\varphi(n)) < f(\varphi(n) + 1) - f(\varphi(n)) = f'(d_n)$ .

Mais comme précédemment, comme  $d_n > \varphi(n)$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$ , donc par composition des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(d_n) = 0$ .

Donc par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t + 2n\pi - f(\varphi(n))) = 0$ .

**Question 7)** On note  $\varepsilon_n = t + 2n\pi - f(\varphi(n))$ . Alors  $f(\varphi(n)) = t + 2n\pi - \varepsilon_n$ , donc  $u_{\varphi(n)} = \cos f(\varphi(n)) = \cos(t + 2n\pi - \varepsilon_n) = \cos(t - \varepsilon_n)$ .

Et comme  $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , on en déduit  $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \cos t = a$ .

**Question 8)** Comme les pixels de l'écran ont une épaisseur et que tout réel de  $[0, 1]$  est approché de très près par un terme de la suite au moins, tous les pixels du segment vont passer au rouge. Le segment sera entièrement rouge à l'écran.