ESPACES VECTORIELS 3

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Exemples de s.e.v. supplémentaires

a) Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x - z = 0\}$ et G le sous e.v. engendré par le vecteur $u = (1,2,-1)$. Montrez que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

b) Montrez que $K_1[X]$ et $\mathrm{vect}(1 + X + X^2)$ sont supplémentaires dans $K_2[X]$.

c) Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 5x - 2y + z = 0 \text{ et } 8x - 3y + t = 0\}$ et G le sous e.v. engendré par le vecteur $u = (-2,2,0,1)$ et $v = (0,0,1,0)$. Montrez que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

****2)** Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $G = \{f \in E \ / \ f(1) = 0\}$ et $H = \{x \mapsto ax \ / \ a \in \mathbb{R}\}$. Montrez que $E = G \oplus H$.

****3)** Soit E l'ensemble des fonctions dont la courbe possède une asymptote en $+\infty$.

a) Montrez que E est un $\mathbb{R}$-e.v.

b) Montrez que E_0, ensemble des fonctions ayant pour limite 0 en $+\infty$, est un s.e.v. de E et donnez-en un supplémentaire.

****4)** Même exercice avec E l'ensemble des fonctions dont la courbe possède des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ et E_0 l'ensemble des fonctions ayant pour limites 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

****5)** Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrez que l'ensemble F_n des fonctions de E, négligeables en 0 devant la fonction $x \mapsto x^n$, est un s.e.v. de E et donnez-en un supplémentaire.

****6)** Soit $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ scalaires distincts. Dans $K[X]$, soit F l'ensemble des polynômes ayant pour racines $a_0, \ldots, a_n$. Montrez que F est un s.e.v. de $K[X]$ et donnez-en un supplémentaire.

****7)** Soit E un K-e.v.

a) Soit F, G deux s.e.v. tel que $F \subset G$ et qui possèdent un supplémentaire commun. Montrez que $F = G$.

b) Si on supprime l'hypothèse d'inclusion, est-ce encore vrai ?

c) Généralisation : soit E_1, E_2, E_3 des sous e.v. tels que $\left\{\begin{array}{rcl} E_1 + E_3 & = & E_2 + E_3 \\ E_1 \cap E_3 & = & E_2 \cap E_3 \\ E_1 & \subset & E_2 \end{array}\right.$. Montrez que $E_1 = E_2$.

***8)** Soit F, G, H des sous e.v. d'un K-e.v. E. Comparez pour l'inclusion $F \cap (G + H)$ et $F \cap G + F \cap H$, ainsi que $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

Donnez des contre-exemples montrant qu'en général, ces inclusions sont strictes.

****9)** Soit A, B, C trois s.e.v. de E, un K-e.v., tels que $B = (A \cap B) \oplus C$. Montrez que $A + B = A \oplus C$.

***10)** Soit X, Y deux parties d'un K-ev E. Montrez que $\mathrm{vect}(X \cup Y) = \mathrm{vect}(X) + \mathrm{vect}(Y)$.

***11)** Pour $k \in \mathbb{N}$, on note F_k l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $y' = ky$.

a) Montrez que F_k est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que la somme $F_0 + F_1 + \ldots + F_n$ est directe.

****12)** Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Pour $k \in \{0,1,2\}$, on pose $E_k = \{f \in E \ / \ \forall x \in \mathbb{C} \ f(jx) = j^k f(x)\}$.

Montrez que E_0, E_1, E_2 sont trois s.e.v. de E et que $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.