ESPACES VECTORIELS 2

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Dans $\mathbb{R}^4$, soit $u = (1, 2, 0, 1)$, $v = (-1, 4, 1, 1)$, $w = (0, 1, 1, 1)$, $t = (-1, 0, 1, 1)$. Montrez que la famille (u, v, w, t) est une famille libre.

***2)** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u = (1, 1, 1),\ v = (2, a, -a),\ w = (a, 1, -a)$. Déterminez les valeurs de a pour que la famille (u, v, w) soit libre.

***3)** Soit u, v, w, x les quatre suites définies respectivement par $n \mapsto (-1)^n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto n2^n$, $n \mapsto \dfrac{1}{n+1}$. Montrez que la famille (u, v, w, x) est libre.

***4)** Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $f_1 : x \mapsto \sin x - \cos(2x)$, $f_2 : x \mapsto \sin(3x)$ et $f_3 : x \mapsto \sin(2x) - \cos x$.
La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ou liée ?

***5)** Dans $E = \mathscr{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$, on considère les 4 vecteurs suivants : :
$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $f_3 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ou liée ?

***6)** Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ou liée ?

****7)** Soient E un K-e.v. et $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille libre de E.

a) Montrez que la famille $(u_1+u_2, u_2+u_3, ..., u_{n-1}+u_n)$ est libre. Et la famille $(u_1+u_2, u_2+u_3, ..., u_{n-1}+u_n, u_n+u_1)$?

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $b_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} u_k$. Montrez que la famille $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

c) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $c_i = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} u_k$. Montrez que la famille $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

d) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$: on pose $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = s + u_i$. Montrez que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.

e) Soit $\lambda \in K$: on pose $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = s + \lambda\, u_i$. Montrez qu'il existe exactement deux valeurs de λ pour lesquelles la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée.

****8)** Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

****9)** Soit f une application d'un ensemble Ω dans $\mathbb{C}$ qui prend une infinité de valeurs.
Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, f, f^2, \ldots, f^n)$ est libre dans l'espace $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{C})$.

*****10)** Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $P_k = (X+k)^n$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

***11)** Soit $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 1, 2), v = (0, 5, 4), w = (3, 1, -1), x = (-9, 2, 3)$.

a) La famille (u, v, w) est-elle libre ? Et (u, v, w, x) ?

b) La famille (u, v, w) est-elle une base de E ? Si oui, déterminez les coordonnées de x dans cette base.

***12)** Soit $E = \mathbb{R}^3$, $a = (1, 2, 3), b = (1, 1, 1), c = (2, 1, 1), d = (-1, 0, -1)$.

a) Montrez que (a, b, c) et (a, b, d) sont des bases de E.

b) Soit x le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la première base. Déterminez ses coordonnées dans la deuxième base.

c) Soit y le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la première base. Déterminez ses coordonnées dans la deuxième base.

***13)** Soit $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \ / \ \exists U \in \mathbb{C}_3[X] \quad P = (X^2+1)U\}$.

a) Montrez que E est un $\mathbb{C}$-e.v.

b) Montrez que $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \ / \ \deg P \leqslant 5 \text{ et } P(i) = P(-i) = 0\}$.

c) Montrez que la famille $(X^2+1, X^3+X, X^4+X^2, X^5+X^3)$ est une base de E.

d) Montrez que la famille $(X^2+1, X^3+X, X^4-1, X^5-X)$ est aussi une base de E.

***14)** Soit $E = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \ / \ P(1) = P'(2) = 0\}$.

a) Montrez que E est un $\mathbb{C}$-e.v.

b) Déterminez la forme générale des éléments de E et donnez une base de E.

***15)** Soit E un K-.e.v. ayant une base à trois vecteurs (e_1, e_2, e_3). Les familles suivantes sont-elles des bases de E ?

a) $(e_1+e_2, \ e_2+e_3, \ e_3+e_1)$?

b) $(e_1-e_2, \ e_2-e_3, \ e_3-e_1)$?

c) $(e_1-e_2+e_3, \ e_2-e_3+e_1, \ e_3-e_1+e_2)$?

***16)** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $U = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $V = \text{vect}(v_1, v_2)$ où

$u_1 = (1,0,4,2) \quad u_2 = (1,2,3,1) \quad u_3 = (1,-2,5,3) \quad v_1 = (4,2,0,1) \quad v_2 = (1,4,2,1)$.

a) Déterminez des bases des sous-espaces vectoriels U et V.

b) Montrez qu'en réunissant ces deux bases, on obtient une base de $\mathbb{R}^4$.

***17)** Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 10v_n$ et $v_{n+1} = -3u_n + 8v_n$. Soit E un $\mathbb{R}$- e.v. ayant une base $\mathscr{B}$ de deux vecteurs (e_1, e_2). On pose $e'_1 = 2e_1 + e_2$, $e'_2 = 5e_1 + 3e_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note z_n le vecteur ayant pour coordonnées u_n, v_n dans la base $\mathscr{B}$.

a) Montrez que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de E.

b) Dans cette base $\mathscr{B}'$, le vecteur z_n a pour coordonnées u'_n, v'_n. Calculez u'_n, v'_n en fonction de u_n, v_n.

c) Donnez l'expression de u'_{n+1}, v'_{n+1} en fonction de u'_n, v'_n.

d) Déterminez enfin l'expression de u_n, v_n en fonction de n, u_0, v_0.

***18)** Dans un K- e.v. E ayant une base de 3 vecteurs, soit $\mathscr{B}$ une base. Pour tout vecteur v de E, on note v_1, v_2, v_3 ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

a) Soit $F = \big\{v \in E \ / \ v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0\big\}$. Vérifiez que F est un s.e.v. de E. Déterminez deux vecteurs de F, non colinéaires, et montrez qu'ils forment une base de F.

b) Même question avec $G = \big\{v \in E \ / \ -v_1 + v_2 - v_3 = 0\big\}$.

c) Soit $H = F \cap G$. Montrez que H est une droite vectorielle de E et donnez-en une base (w).

d) Donnez deux bases de F et G telles que le vecteur w en fasse partie.

***19)** Dans un K- e.v. E ayant une base de 4 vecteurs, soit $\mathscr{B}$ une base. Pour tout vecteur v de E, on note v_1, v_2, v_3, v_4 ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

a) Soit $F = \big\{v \in E \ / \ v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4 = 0\big\}$. Vérifiez que F est un s.e.v. de E. Déterminez trois vecteurs de F qui forment une base de F.

b) Même question avec $G = \big\{v \in E \ / \ 3v_1 + v_2 - v_3 + 2v_4 = 0\big\}$.

c) Soit $H = F \cap G$. Montrez que H est un plan vectoriel de E et donnez-en une base (w, w').

d) Donnez deux bases de F et G telles que les vecteurs w et w' en fassent partie.

****20)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^n}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrez que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

****21)** Montrez que la famille des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ où α est un réel quelconque est libre.

****22)**

a) Montrez que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) Montrez que la famille $(x \mapsto \big|x - \lambda\big|)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

c) Montrez que la famille $(x \mapsto \sin(\lambda x))_{\lambda\in]0,+\infty[}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Que dire de la famille $(x \mapsto \sin(\lambda x))_{\lambda\in[0,+\infty[}$? et de la famille $(x \mapsto \sin(\lambda x))_{\lambda\in\mathbb{R}^*}$?