ESPACES VECTORIELS 1

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Montrez que l'ensemble des suites réelles bornées est un $\mathbb{R}$-e.v.

***2)** Montrez que l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $[-1,1]$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

***3)** Montrez que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ont une période entière est un $\mathbb{R}$-e.v.

***4)** Soit $E = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \ / \ \exists a \in \mathbb{R} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^a) \right\}$. Montrez que E est un $\mathbb{R}$-e.v.

***5)** Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

a) l'ensemble des fonctions monotones sur $[0, +\infty[$?

b) l'ensemble des fonctions f continues sur $[0,1]$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$;

c) l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = |f|$;

****6)** Soit I un intervalle, E l'ensemble des fonctions définies sur I qui peuvent s'écrire $f - g$ où f et g sont deux fonctions croissantes sur I. Montrez que E est un $\mathbb{R}$-e.v.

Dans le cas où $I = \mathbb{R}$, montrez que E contient les fonctions polynômes, les fonctions sin et cos.

***7)** Soit $U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \ / \ 2x + y - z = 0 \right\}$. Montrez que U est un s.e.v. de $\mathbb{C}^3$, et déterminez deux triplets u, v tels que $U = \mathrm{vect}(u,v)$.

***8)** Soit $A = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y + z - t = 0 \text{ et } -x + 2y + z + t = 0 \right\}$.

a) Montrez que A est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ et déterminez deux vecteurs u, v tels que $A = \mathrm{vect}(u,v)$.

b) Soit $u' = (3,1,-2,3)$ et $v' = (4,2,-3,3)$. Montrez que $A = \mathrm{vect}(u', v')$.

***9)** Dans $\mathbb{R}^4$, comparez les deux s.e.v. $\mathrm{vect}((1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,5))$ et $\mathrm{vect}((-1,-1,1,-1), (4,1,2,4))$: l'un est-il inclus dans l'autre ? sont-ils égaux ?

***10)** Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par la famille (e_1, e_2) où $e_1 = (1,-1,1,2)$ et $e_2 = (-1,2,3,1)$?

***11)** Soit $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z - t = 0 \right\}$, $a = (1,1,-2,-1)$, $b = (0,-1,1,2)$.

a) Montrez que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ et que $F = \mathrm{vect}(a,b)$.

b) Soit $c = (2,1,-3,0)$, $d = (-1,5,-4,-11)$. Montrez que $F = \mathrm{vect}(a,c,d)$.

c) Soit $e = (3,1,-4,1)$, $f = (1,1,1,1)$. On pose $G = \mathrm{vect}(e,f)$. Montrez que $G \cap F$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ et montrez que $G \cap F$ est une droite vectorielle dont vous préciserez un vecteur directeur.

***12)** Justifiez que les ensembles suivants sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^5$ et donnez une famille génératrice de chacun d'eux :

a) $A = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$

b) $B = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \ / \ x_1 + x_3 + x_5 = 0, \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0, \quad x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$

c) $C = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \ / \ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0\}$

***13)** Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ P(1) = P'(0) = 0\}$.

a) Montrez que E est un $\mathbb{R}$-e.v.

b) Déterminez 3 éléments de E, notés A, B, C, tels que $E = \mathrm{vect}(A,B,C)$.

***14)** Justifiez que les ensembles suivants sont des s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$ en donnant une famille génératrice de chacun d'eux :

a) $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(X^2) = (X^2+1)P(X)\}$

b) $B = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ (X-1)P' = P\}$

c) $C = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(X+2) + P(X) = 2P(X+1)\}$

d) $D = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ (X+1)P'(X) - 3P(X-1) = 0\}$

***15)** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour $k \in \{0, \ldots, 3\}$, on pose $P_k = \displaystyle\prod_{0 \leqslant i \leqslant 3, \ i \neq k} (X - i)$.

a) Explicitez les 4 polynômes P_0, P_1, P_2 ,P_3.

b) Montrez que $E = \text{vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$.

***16)** Soit E l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -3u_{n+1} + 10u_n$.

a) Montrez que E est un $\mathbb{R}$- e.v et donnez-en une famille génératrice.

b) Déterminez une expression simple de v_n en fonction de n, où (v_n) est la suite de E telle que $v_0 = 1, v_1 = -3$.

***17)** Soit S l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équa. diff. $(1+x^2)y'' - (3x^2 - 4x + 3)y' + (2x^2 - 6x + 4)y = 0$.

a) Montrez que S est un $\mathbb{R}$- e.v.

b) A toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on associe $g : x \mapsto (1+x^2)f(x)$. Montrez que $f \in S$ si et seulement si g est solution d'une équation différentielle du second ordre à coef. constants.

c) Montrez que $S = \text{vect}(h, k)$ où h, k sont deux fonctions que vous déterminerez.

***18)** Soit E l'ensemble des suites complexes (u_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} - 9u_{n+1} + 18u_n$.

a) Montrez que E est un $\mathbb{C}$- e.v.

b) Déterminez les trois suites géométriques $(a^n), (b^n), (c^n)$ qui appartiennent à E.

c) Montrez que $E = \text{vect}((a^n), (b^n), (c^n))$.