Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mais le lecteur attentif notera que la théorie ne demande pas plus que le fait que $\mathbb{K}$ soit un corps.

1 Notion d'espace vectoriel

1.1 Définition et premières propriétés

Définition. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni de deux opérations, aussi appelées lois :

une addition :
$$+ : \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow E \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \longmapsto \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \end{array}$$

et un produit externe :
$$\mathbb{K}. \quad : \begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\alpha, \overrightarrow{u}) \longmapsto \alpha \,.\, \overrightarrow{u} \end{array}$$

telles que $(E, +)$ est un groupe commutatif :

- $+$ est associative : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3 \quad (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
- $+$ est commutative : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2 \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- $+$ possède un neutre noté $\overrightarrow{0_E}$: $\forall \overrightarrow{u} \in E \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{O_E} = \overrightarrow{u}$
- tout élément de E a un opposé dans E : $\forall \overrightarrow{u} \in E \quad \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_E}$

et la loi externe vérifie les propriétés :

- 1 est neutre à gauche pour la loi externe : $\forall \overrightarrow{u} \in E \quad 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- $\mathbb{K}.$ est distributive à droite pour $+$: $\forall(\lambda, \mu) \in K^2 \ \forall \overrightarrow{u} \in E \quad (\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}$
- $\mathbb{K}.$ est distributive à gauche pour $+$: $\forall \lambda \in K \ \forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2 \quad \lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}$
- associativité mixte : $\forall(\lambda, \mu) \in K^2 \ \forall \overrightarrow{u} \in E \quad (\lambda\mu).\overrightarrow{u} = \lambda.(\mu.\overrightarrow{u})$

Vocabulaire :

- La multiplication externe est notée $\mathbb{K}$.
- Les éléments $\overrightarrow{u}$ de E sont appelés vecteurs de E.
- Les éléments α de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.
- $\overrightarrow{0_E}$ est le vecteur nul de E.
- Le symétrique du vecteur $\overrightarrow{u}$ est noté $-\overrightarrow{u}$ et appelé opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Remarque. À propos du produit externe :

- Il est le plus souvent implicite : $\alpha \,.\, \overrightarrow{u}$ sera simplement noté $\alpha\, \overrightarrow{u}$.
- On écrit toujours le scalaire devant le vecteur : $\alpha\, \overrightarrow{u}$ et non $\overrightarrow{u}\, \alpha$. Le symbole $\times$ est à éviter.
- Le produit externe n'est pas le produit scalaire. Il fait intervenir un nombre et un vecteur, alors que le produit scalaire concerne deux vecteurs (voir chapitre *Espaces euclidiens*).

1.2 Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

Les ensembles suivants, munis de leur addition et de leur produit externe habituels, constituent des espaces vectoriels et sont à connaître, car ils servent de fondements à de nombreux raisonnements :

- L'ensemble $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ des vecteurs du plan et l'ensemble $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ des vecteurs de l'espace sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : le produit externe coïncide avec le produit interne.
- $\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $K^{\mathbb{N}}$ des suites à termes dans K est un K-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$, où Ω est un ensemble non vide, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-e.v., l'ensemble $\mathscr{F}(\Omega, E)$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$ est aussi un $\mathbb{K}$-e.v.

Le quatrième point n'est qu'un cas particulier d'un fait plus général.

Proposition 1. *Soit $E_1, \ldots, E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
Alors pour les lois naturelles sur les n-uplets, l'ensemble $E_1 \times \ldots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.3 Propriétés calculatoires élémentaires

Proposition 2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ des vecteurs de E, α et β deux scalaires. Alors :*

- ▹ *Si $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.*
- ▹ $0 \,.\, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$ *et* $\alpha \,.\, \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$.
- ▹ $\alpha \,.\, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E} \iff \alpha = 0$ *ou* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$.
- ▹ $(-1) \,.\, \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$, $(-\alpha) \,.\, \overrightarrow{u} = -\alpha \,.\, \overrightarrow{u}$,
  $(\alpha - \beta) \,.\, \overrightarrow{u} = \alpha \,.\, \overrightarrow{u} - \beta \,.\, \overrightarrow{u}$,
  $\alpha \,.\, (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \alpha \,.\, \overrightarrow{u} - \beta \,.\, \overrightarrow{v}$.

1.4 Notion de sous-espace vectoriel

En pratique, on ne démontre jamais qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en revenant à la définition. On montrera plutôt que F est un sous-espace vectoriel d'un des espaces vectoriels de référence.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un ensemble.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E quand :

- — F est inclus dans E : $F \subset E$.
- — F est non vide : $F \neq \emptyset$.
- — F est stable par $+$: $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2 \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$
- — F est stable par $\mathbb{K}$. : $\forall \lambda \in K \ \forall \overrightarrow{u} \in F \quad \lambda \overrightarrow{u} \in F$

L'intérêt de cette notion est donné par la propriété suivante :

Proposition 3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F, muni des opérations induites par celles de E, est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
*En particulier, un sous-espace vectoriel contient **toujours** le vecteur nul et est stable par « opposition ».*

Exercices :

1) Justifiez que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2) $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\big\}$ est-il un espace vectoriel ?
3) Et $F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geqslant 0\big\}$?
4) Et $\mathscr{S}_0(\mathbb{C})$, l'ensemble des suites complexes tendant vers 0 en l'infini ?
5) $F = \big\{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ \deg(P) = n\big\}$ est-il un espace vectoriel ?
6) A étant un polynôme fixé, $F = \big\{AP \ / \ P \in \mathbb{K}[X]\big\}$, ensemble des multiples polynômes de A ?
7) Et $F = \big\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ / \ |x| \leqslant |y|\big\}$?

Proposition 4 (Caractérisation rapide des sous-espaces vectoriels)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un ensemble.*
Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- ▹ *F est inclus dans E :* $F \subset E$.
- ▹ *F est non vide :* $F \neq \emptyset$.
- ▹ *F est stable par combinaison linéaire :* $\forall \lambda \in K \ \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2 \quad \lambda . \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$

1.5 Exemples fondamentaux de sous-espaces vectoriels (à connaître)

Proposition 5 (Sous-espaces vectoriels triviaux)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors E et $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ (appelé sous-espace vectoriel nul de E) sont deux sous-espaces vectoriels de E.*

Remarque. Ne pas confondre le sous-espace vectoriel nul de E, noté $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$:
- avec le vecteur nul $\overrightarrow{0_E}$ qui est un vecteur, et non un espace vectoriel ;
- avec l'ensemble vide $\emptyset$, qui n'est pas un sous-espace vectoriel.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul de E, on appelle droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u}$ l'ensemble $F = \{\lambda \overrightarrow{u},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$, noté aussi $\mathbb{K}\overrightarrow{u}$.

Il est facile de vérifier qu'une droite vectorielle de E est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

Proposition 7 (Espaces de fonctions)**.** *Soit I un intervalle non réduit à un point, n un entier naturel quelconque. Alors les ensembles $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont tous des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.*

1.6 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
- ▷ *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.*
- ▷ *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E indexée par un ensemble I, alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque. Cela ne marche pas du tout avec les réunions !

***Exercices* :**

8) L'ensemble des polynômes réels de degré inférieur à n qui s'annulent en 0 et en 2 est un espace vectoriel.
9) Soit F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E. Montrez que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

1.7 Équations linéaires scalaires homogènes

Proposition 9. *Soit $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$.*
L'ensemble des solutions de l'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ est un sous-espace vectoriel de K^n.

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 10. *L'ensemble des solutions d'un système (scalaire) linéaire homogène de p équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.*

2 Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs

2.1 Notion de combinaison linéaire

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ des vecteurs de E.
Une combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ est un vecteur de E qui peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n} \quad \text{où } (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Exemple.

— Exemples de combinaisons linéaires de deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$:
$2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{0_E}$.

— Tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est combinaison linéaire des polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$.

Exercices :

10) Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 2)$ et $e_3 = (4, 2, 0)$.
Les vecteurs $u = (1, -1, 3)$ et $v = (2, 1, 0)$ sont-ils des combinaisons linéaires de e_1, e_2 et e_3 ?
11) Dans $\mathbb{R}[X]$, soit $P_1 = X(X-1)(X-2)$, $P_2 = X(X-2)(X-3)$ et $P_3 = (X-1)(X-3)(X-4)$. Le polynôme $P = X^2 + X + 1$ est-il combinaison linéaire de (P_1, P_2, P_3) ?
12) Dans $\mathbb{R}[X]$, soit $P_0 = X(X-1)$, $P_1 = X(X-2)$ et $P_2 = (X-1)(X-2)(X-3)$. Le polynôme $P = X^3 + 2X - 6$ est-il combinaison linéaire de (P_0, P_1, P_2) ?

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ des vecteurs de E.
On note $\mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$:

$$\mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{e_k} \;/\; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Autrement dit, si $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de E, alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \in \mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \text{ est une combinaison linéaire de } \overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{e_k}. \end{aligned}$$

Exercices :

13) Donnez une définition en compréhension de l'ensemble $\mathrm{vect}(X+1, \quad X^2 + X, \quad X^3 + X^2)$;
14) De même avec $\mathrm{vect}\big((1, 0, 0), (0, 1, 0)\big)$;

Proposition 11. *Si $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ sont des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$.*

Remarque. Cette propriété fournit une nouvelle méthode pour établir qu'un ensemble de vecteurs F est un espace vectoriel : l'écrire sous la forme $F = \mathrm{vect}(\cdots)$.

Exercices :

15) Montrez que $F = \big\{(a+2b)\,X^2 + (b-c)\,X + a + b - c \;/\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\big\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.
16) De même avec $G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + y - z = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\big\}$,
17) De même avec $H = \big\{x \mapsto A\cos(x - \varphi) \;/\; (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big\}$.
18) Soit E une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ou 2, à coefficients constants. L'ensemble $\mathscr{S}(E)$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

La droite vectorielle $\mathbb{K}\overrightarrow{u}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$: $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u}) = \mathbb{K}\overrightarrow{u}$. Avec deux vecteurs, on définit (presque toujours) des plans vectoriels.

Définition. Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$ et si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ ne sont pas proportionnels (on dit aussi colinéaires plutôt que proportionnels), on appelle plan vectoriel dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ l'ensemble $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Proposition 12. *Si F est un sous-espace vectoriel de E et si F contient les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, alors*

$$\mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}) \subset F.$$

Autrement dit, $\mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est le plus petit s.e.v. de E qui contient $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$.

Ce dernier résultat permet de prouver l'inclusion d'un s.e.v. dans un autre si on peut écrire le premier sous la forme $\mathrm{vect}(\cdots)$.

Enfin, quelques propriétés calculatoires sur les vecteurs engendrant un s.e.v. :

Proposition 13. *Soit $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

- ▷ *Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires non nuls,*

$$\mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}) = \mathrm{vect}(\alpha_1 \overrightarrow{e_1}, \alpha_2 \overrightarrow{e_2}, \dots, \alpha_n \overrightarrow{e_n})$$

(on peut multiplier les vecteurs par des constantes non nulles)

- ▷ *si $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, alors*

$$\mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{u}) = \mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}).$$

(on peut retirer/adjoindre un vecteur s'il est combinaison linéaire des autres)

- ▷ *Si $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires,*

$$\mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}) = \mathrm{vect}\left(\overrightarrow{e_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$$

(on peut ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs)

***Exercices* :**

19) Dire de quels espaces ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels puis simplifier leur écriture :
   — $\mathrm{vect}\big((\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (1,3,2), (-4,6,-2)\big)$.
   — $\mathrm{vect}(3X^2 + 2X + 1, \quad 2 + X, \quad 1 - X - X^2)$.

2.3 Sous-espace engendré par une partie

On généralise la notion précédente à un ensemble (fini ou infini) de vecteurs de E.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E quelconque (pas forcément un sous-espace vectoriel).

On appelle sous-espace vectoriel engendré par A l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A : il est noté $\mathrm{vect}(A)$.

***Exercices* :**

20) Qu'est-ce que $\mathrm{vect}(\emptyset)$?
21) Soit A l'ensemble des polynômes à coefficients positifs. Qu'est-ce que $\mathrm{vect}(A)$?

3 Familles finies de vecteurs

Dans un premier temps, on ne parle que de familles **finies** de vecteurs.

3.1 Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

Une famille finie de vecteurs de E est une liste finie et ordonnée de vecteurs de E, où les répétitions sont autorisées.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., F un s.e.v. de E, $\mathscr{G} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{G}$ est une famille génératrice du s.e.v. F quand :
- chaque vecteur de la famille $\mathscr{G}$ se trouve dans F : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \overrightarrow{e_k} \in F$;
- tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de F est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{G}$:

$$\forall \overrightarrow{u} \in F, \quad \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \overrightarrow{e_k}.$$

Remarque. Il faut toujours bien préciser de quel sous-espace vectoriel la famille considérée est génératrice.

Exemple.
- Famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\}$.
- Familles génératrices de $F = E = \mathbb{R}^2$: $\quad \mathscr{G}_1 = \big((1,0),\, (0,1)\big)$ et $\mathscr{G}_2 = \big((1,0),\, (0,1),\, (1,1)\big)$.
- Familles génératrices de $\mathbb{R}_3[X]$: $\quad \mathscr{G}_1 = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathscr{G}_2 = (X^2 - 1,\ X - 1,\ X^2 + X,\ X^3 + 1)$.

Proposition 14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, $\mathscr{G} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.*
Alors la famille $\mathscr{G}$ est génératrice de F si et seulement si $F = \mathrm{vect}(\mathscr{G})$.

Exercices :

22) Donnez une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$.
23) Donnez une famille génératrice de $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x + y - z + 3t = 0 \text{ et } x - 3y + 2z + t = 0\}$.
24) Donnez une famille génératrice de $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + t = 0 \text{ et } y + 2z + 3t = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}$.

Remarque. Ne pas confondre les combinaisons linéaires, qui sont des vecteurs, avec $\mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, qui est un ensemble de combinaisons linéaires.

3.2 Familles liées, familles libres

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{F}$ est une famille liée quand il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \, \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \, \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n \, \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0_E}.$$

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ sont linéairement dépendants. Toute combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls est appelée une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs.

Remarque. L'expression « non tous nuls » signifie qu'au moins un des scalaires est différent de 0.

Exemple.
- Dans $E = \mathbb{R}^2$: $\mathscr{F} = \big(e_1,\, e_2\big)$ où $e_1 = (1, -1)$ et $e_2 = (2, -2)$.
- Dans $E = \mathbb{R}^3$: $\mathscr{F} = \big(e_1, e_2, e_3\big)$ où $e_1 = (1, -2, 2)$, $e_2 = (1, -7, 5)$ et $e_3 = (-4, -7, 1)$.
- Dans E $\mathbb{K}$-e.v. quelconque : $\mathscr{F}_1 = (\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$ et $\mathscr{F}_2 = (\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{0_E},\ \overrightarrow{v})$.

Proposition 15. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.*
Alors la famille $\mathscr{F}$ est liée si et seulement si un (au moins) de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Corollaire 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs de E. Alors :*
- *La famille $(\overrightarrow{e_1})$ est liée si et seulement si $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0_E}$.*
- *La famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est liée si et seulement si $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont proportionnels.*

Remarque. Ce dernier cas est faux pour des familles comportant trois vecteurs et plus.

Corollaire 2. *Si une famille de vecteurs contient le vecteur nul, alors elle est liée.*
Si une famille de vecteurs contient deux fois le même vecteur, alors elle est liée.

Le contraire de la notion de famille liée est la notion de famille libre.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, $\mathscr{F} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{F}$ est une famille libre quand

$$\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{0_E} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 0,\, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ sont linéairement indépendants.

Par convention, on considère que la famille vide $\emptyset$ est libre.

Exemple.
— Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{F} = \big(e_1, e_2, e_3\big)$ où $e_1 = (2, 1, -1), e_2 = (-1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ puis $\mathscr{F}' = (e_1, e_2)$.
— Dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathscr{F} = (1,\ X,\ X^2,\ \ldots,\ X^n)$.

Exercices :

25) Montrez que la famille de fonctions $(1, \sin, \cos, \tan)$ est libre dans l'espace $\mathscr{F}\left(\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$.
26) La famille de fonctions $(1, \sin, \cos, \sin^2, \cos^2)$ est-elle libre dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
27) Montrez que la famille de suites $((1), (n), (n^2), (2^n))$ est libre dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 16. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.*

Un cas utile : famille de polynômes étagées en degré.

Proposition 17. *Si $\mathscr{F} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls tels que*

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n),$$

alors $\mathscr{F}$ est une famille libre.

Identification des coefficients

En général, quand deux combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs sont égales, on ne peut pas conclure que les coefficients sont égaux.

On montre que les seules familles qui permettent cette identification sont les familles libres.

Proposition 18 (Propriété fondamentale des familles libres : identification des coefficients)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $\mathscr{F} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.
Si $\mathscr{F}$ est une famille libre, on peut identifier les coefficients dans deux écritures d'une combinaison linéaire de vecteurs de F :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{e_k} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overrightarrow{e_k} \implies \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_k = \beta_k.$$

Et réciproquement, si une famille de vecteurs permet l'identification des coefficients, alors elle est libre.

3.3 Bases d'un sous-espace vectoriel

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., F un s.e.v. de E, $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{B}$ est une base de F si $\mathscr{B}$ est une famille libre et une famille génératrice de F.

Exemple.

— Deux bases de $\mathbb{R}^2$: $\mathscr{B}_0 = \big((1,0),\ (0,1)\big)$ et $\mathscr{B} = \big((1,3),\ (-2,1)\big)$.
— Base de $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathscr{B}_0 = (1,\ X,\ X^2)$.
— Base canonique de $\mathbb{K}^n$: $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où e_k désigne le n-uplet $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, l'unique 1 étant placé à la k-ième position. Cette base comporte n vecteurs.
— Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: $\mathscr{B}_0 = (1,\ X,\ X^2,\ \ldots,\ X^n)$. Cette base comporte $n+1$ polynômes.

Remarque. L'adjectif « canonique » signifie ici « le/la plus simple qu'on puisse imaginer », « qui vient naturellement à l'esprit ». La notion de base canonique est foncièrement attachée à la nature des vecteurs : on ne parle pas de la base canonique d'un espace vectoriel quelconque, seules des bases concrètes dans un espace concret peuvent être qualifiées de canoniques par la communauté mathématique, pas par vous, ni moi.

Proposition 19. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.*

Alors $\mathscr{B}$ est une base de F si et seulement si :

— *tous les vecteurs de la famille $\mathscr{B}$ se trouvent dans F ;*
— *tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de F peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$.*

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-e.v. E, $\mathscr{B}$ une base de F, $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de F.

On appelle coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B}$ l'unique n-uplet de scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\, \overrightarrow{e_1} + \alpha_2\, \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n\, \overrightarrow{e_n}.$$

Exemple.

— Dans $\mathbb{R}^2$, coordonnées du vecteurs $u = (5, -3)$ dans les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}$.
— Dans $\mathbb{C}_3[X]$, coordonnées du polynôme $P = X^3 - 2\,X^2 + 3$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.

Remarque. Quand on parle de coordonnées d'un vecteurs, il faut toujours dire dans quelle base on travaille. Par ailleurs, ne jamais confondre :

— un vecteur $\overrightarrow{u}$ (élément de E)
— avec ses coordonnées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans une base $\mathscr{B}$ (élément de $\mathbb{K}^n$).

Proposition 20. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-e.v. E, $\mathscr{B}$ une base de F, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de F.*

On suppose que $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
et que $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Alors, dans la base $\mathscr{B}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$
et $\lambda\,\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(\lambda\,\alpha_1, \ldots, \lambda\,\alpha_n)$.

En général, on note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ ou $\operatorname*{coord}_{\mathscr{B}} \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

On a donc montré les règles de calcul suivantes : pour tout couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et tout scalaire λ, $\operatorname*{coord}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \operatorname*{coord}_{\mathscr{B}} \overrightarrow{u} + \operatorname*{coord}_{\mathscr{B}} \overrightarrow{v}$ et $\operatorname*{coord}_{\mathscr{B}}(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda \operatorname*{coord}_{\mathscr{B}} \overrightarrow{u}$.

4 Généralisation à des familles quelconques

On note $A \subset_f B$ pour indiquer que A est une partie finie de B.

Proposition 21. *Soit* $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ *une famille quelconque de vecteurs de* E*,* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
Alors $\mathrm{vect}\left((\overrightarrow{e_i})_{i\in I}\right)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des sous-familles* ***finies*** *de* $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ *:*

$$\mathrm{vect}\left((\overrightarrow{e_i})_{i\in I}\right) = \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j \overrightarrow{e_j} \ / \ J \subset_f I,\ (\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J \right\}$$

Ce résultat nous amène à étendre les définitions de combinaisons linéaires, de familles liées, de familles libres et de bases.

Définition. Soit $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{e_i})$ toute combinaison linéaire d'une sous-famille **finie** de $(\overrightarrow{e_i})$.
$\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{e_i})$ quand il existe une partie **finie** J de I et des scalaires $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ tels que $\overrightarrow{v} = \displaystyle\sum_{j\in J} \lambda_j \overrightarrow{e_j}$.

En fait, on ramène les définitions à des parties finies, car on ne peut additionner qu'un nombre fini de vecteurs.

Définition. Avec les mêmes hypothèses, on dit que la famille $(\overrightarrow{e_i})$ est liée quand il existe une sous-famille **finie** de $(\overrightarrow{e_i})$ qui est liée.
On dit donc que la famille $(\overrightarrow{e_i})$ est libre quand toute sous-famille **finie** de $(\overrightarrow{e_i})$ est libre.
On dit que la famille $(\overrightarrow{e_i})$ est génératrice de E quand $\mathrm{vect}(e_i) = E$, autrement dit quand tout vecteur de E est une combinaison linéaire d'une sous-famille **finie** de $(\overrightarrow{e_i})$.
On dit donc que la famille $(\overrightarrow{e_i})$ est une base de E quand tout vecteur de E est une combinaison linéaire d'une « unique » sous-famille **finie** de $(\overrightarrow{e_i})$.

Remarque. Dans cette dernière définition, l'unicité est un peu exagérée. Plus précisément, elle signifie que pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E, il existe une unique partie finie J de I et des scalaires $(\lambda_j)_{j\in J}$ tels que $\overrightarrow{v} = \displaystyle\sum_{j\in J} \lambda_j \overrightarrow{e_j}$ et tous les scalaires λ_j sont non nuls, autrement dit on n'écrit pas de combinaison linéaire avec des coefficients nuls puisque les termes correspondants ne servent à rien. En particulier, le vecteur nul est associé à la partie vide.

Exemples.
- Toute famille de polynômes dont les degrés sont distincts est libre.
- La famille $(1, X, X^2, \ldots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
- La famille des fonctions $(x \mapsto \cos(kx), x \mapsto \sin(kx))_{k\in\mathbb{N}}$ engendre le sous-espace des fonctions sinusoïdales dont les périodes sont du type $\dfrac{2\pi}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

4.1 Notation commode

Dans le cas d'une famille infinie de vecteurs $(\overrightarrow{e_i})$, plutôt que de faire intervenir des parties finies de I, on convient de noter les combinaisons linéaires sous la forme d'une somme « infinie » $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{e_i}$ en ajoutant l'hypothèse que la famille (λ_i) est presque nulle, ce qui signifie que l'ensemble $\{i \in I \ / \ \lambda_i \neq 0\}$ est fini.
On écrit donc des sommes infinies mais dans lesquelles presque tous les termes sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux : ce sont donc en fait des sommes finies.
On peut donc réexprimer les définitions précédentes en faisant apparaître la notion de famille presque nulle de scalaires.
En général, on note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I.

$\mathrm{vect}\left((\overrightarrow{e_i})_{i\in I}\right) = \left\{ \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{e_i} \ / \ (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}$

$(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ est libre si et s.si $\quad \forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad \displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0_E} \implies (\forall i \in I \quad \alpha_i = 0)$

$(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ est liée si et s.si $\quad \exists (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad \displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0_E}$ et $(\exists i \in I \quad \alpha_i \neq 0)$

5 Sommes de sous-espaces vectoriels

5.1 Généralités

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme de $F_1, \ldots, F_n$ l'ensemble noté $F_1 + \ldots + F_n$:

$$F_1 + \ldots + F_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i} \ / \ (\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \in F_1 \times \ldots \times F_n \right\}$$

Proposition 22. *Avec les mêmes notations : $F_1 + \ldots + F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.*
De plus, c'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $F_1, \ldots, F_n$.
Si on connaît des familles génératrices de chacun des s.e.v. $F_1, \ldots, F_n$, alors en réunissant ces familles, on obtient une famille génératrice de $F_1 + \ldots + F_n$.

Proposition 23. *Soit $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n)$ des vecteurs de E.*
Alors $\text{vect}(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n) = \text{vect}(u_1, \ldots, u_p) + \text{vect}(u_{p+1}, \ldots, u_n)$.

5.2 Sommes directes

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe quand tout vecteur de $F_1 + \ldots + F_n$ a une unique écriture $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i}$ où $(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \in F_1 \times \ldots \times F_n$.

On dit aussi que les sous-espaces sont en somme directe. Dans ce cas, quand on veut insister sur cette propriété, on note la somme sous la forme $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$

Proposition 24. *La somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe si et seulement si le vecteur nul a une unique décomposition $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i}$ où $(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \in F_1 \times \ldots \times F_n$, qui est la décomposition triviale.*

Autrement dit, la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe si et seulement la seule solution de l'équation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{0_E}$ d'inconnue $(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \in F_1 \times \ldots \times F_n$ est le n-uplet nul.

5.3 Cas particulier de deux sous-espaces

Proposition 25. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E.*
La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Attention ! Il ne faut pas généraliser à trois ou plus sous-espaces. Même si $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ est le sous-espace nul, on ne peut pas conclure que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont supplémentaires quand $E = F \oplus G$.

Exercices :

28) Dans $\mathbb{K}^n$, montrez que $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \ / \ x_1 + \ldots + x_n = 0\}$ et la droite vectorielle dirigée par $u = (1, 2, 3, \ldots, n)$ sont supplémentaires.
29) Montrez que l'ensemble F des fonctions paires et celui G des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ et qu'ils sont supplémentaires.