LOIS DE COMPOSITION INTERNE, GROUPES, ANNEAUX

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Pour $(x,y)\in[-1,1]^2$, on pose $x\Delta y = x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

a) Montrez que Δ est une l.c.i. dans $[-1,+1]$ (on pourra poser $x=\sin\alpha, y=\sin\beta$).

b) Montrez que Δ a un neutre que vous préciserez.

c) Cherchez les éléments symétrisables pour Δ, et précisez les symétriques.

d) Δ est-elle commutative, associative ?

****2)** Pour $(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}$, on pose $x\#y = x.y^x$.

a) Montrez que $\#$ a un neutre.

b) $\#$ est-elle commutative, associative ?

c) Cherchez les éléments symétrisables par $\#$.

***3)** Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $x*y = x+y-xy$. $*$ est évidemment une l.c.i dans $\mathbb{R}$.

Étudiez ses propriétés éventuelles. Quels sont les réels symétrisables pour cette loi ?

***4)** Soit $S=\{a^2+b^2\ /\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$. Montrez que S est stable par $\times$.

***5)** Soit A, B deux anneaux (les lois sont notées de la même façon $+$ et $\times$). On définit deux lois dans $C=A\times B$:

▷ pour tout $((a,b),(a',b'))\in C^2$, $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$;

▷ pour tout $((a,b),(a',b'))\in C^2$, $(a,b)\times(a',b')=(a\times a',b\times b')$.

Montrez que C muni de ces deux lois est un anneau, appelé anneau produit de A et B.

****6)** On pose $A=\{a+ib\ /\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$.

a) Montrez que A est un anneau, appelé anneau des entiers de Gauss.

b) Montrez que pour tout $z\in A$, $|z|^2\in\mathbb{N}$

c) Déterminez les éléments inversibles de A (pour la loi $\times$, bien sûr).

****7)** Même exercice avec $B=\{a+jb\ /\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$.

****8)** Soit A un anneau commutatif. Un élément a de A est dit nilpotent quand il existe un entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $a^n=0$.

a) Montrez que N, ensemble des éléments nilpotents, est stable par $+$ et $\times$. Est-ce un sous-anneau de A ?

b) Montrez que si $a\in N$, alors $1-a$ est inversible dans A.

****9)** Soit A un anneau non nul tel que pour tout $x\in A$, $x^2=x$.

a) Montrez que pour tout $a\in A$, $2a=0$ et pour tout $(a,b)\in A^2$, $ba=-ab$. Déduisez-en que A est un anneau commutatif.

b) Dans le cas où A est intègre, déterminez tous les éléments de A.

c) On définit la relation $\lhd$ sur A de la façon suivante : $a\lhd b \iff ba=a$. Montrez que $\lhd$ est une relation d'ordre sur A.

***10)** Des exemples de corps intermédiaires entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) On pose $K=\{a+ib\ /\ (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$. Montrez que K est un corps.

b) Même exercice avec $K=\{a+b\sqrt{2}\ /\ (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$.

****11)** Plus généralement, si r est un complexe non rationnel solution d'une équ. du second degré à coeff. entiers, alors $K=\{a+br\ /\ (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$ est un corps.

*****12)** On pose $r=\sqrt[3]{2}$ et $K=\{a+br+cr^2\ /\ (a,b,c)\in\mathbb{Q}^3\}$. Montrez que K est un corps.

***13)** Pour $((x,y),(x',y'))\in(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R})^2$, on pose $(x,y)\vee(x',y')=(xx',xy'+y)$. Montrez que $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\vee)$ est un groupe. Est-il abélien ?

****14)** Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $x\Delta y = x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$. Δ est évidemment une l.c.i. dans $\mathbb{R}$.

a) Montrez que Δ a un neutre que vous préciserez.

b) Cherchez les éléments symétrisables pour Δ, et précisez leurs symétriques.

c) Montrez que pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{sh}(u+v)=\mathrm{sh}(u)\,\mathrm{ch}(v)+\mathrm{sh}(v)\,\mathrm{ch}(u)$. Déduisez-en que $(\mathbb{R},\Delta)$ est un groupe abélien.

****15)** Montrez que l'ensemble des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$ est un groupe pour la multiplication.

****16)** Les ensembles suivants sont-ils des groupes pour la loi $\circ$?

a) l'ensemble des similitudes directes du plan

b) l'ensemble des translations du plan

c) l'ensemble des rotations du plan

d) l'ensemble des rotations du plan dont le centre est un point fixé

e) l'ensemble des homothéties du plan

****17)** Soit $G = \{x + y\sqrt{2} \ / \ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1\}$. Montrez que G est un groupe pour la multiplication.

***18)** Montrez qu'une intersection de sous-groupes d'un groupe est encore un sous-groupe.

Cas particulier : $(G, .) = (\mathbb{Z}, +)\ldots$ Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, justifiez l'existence de $m \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ et reconnaissez cet entier m.

***19)** Soit $(G, .)$ un groupe commutatif. Pour tout couple $(A, B) \in \mathscr{P}(G)^2$, on pose $A.B = \{a.b \ / \ (a, b) \in A \times B\}$.

a) Montrez que si A et B sont deux sous-groupes de G, alors $A.B$ est aussi un sous-groupe de G.

b) Cas particulier : $(G, .) = (\mathbb{Z}, +)\ldots$ Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, justifiez l'existence de $d \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ et reconnaissez cet entier d.

c) Si on ne suppose plus G commutatif, le résultat de la question a) reste-t-il vrai ?

****20)** Dans un groupe $(G, .)$, dont le neutre est noté e, a, b sont deux éléments tels que $a^{-1}ba = b^{-1}$ et $b^{-1}ab = a^{-1}$. Montrez que $a^4 = b^4 = e$.

****21)** Soit $(G, .)$ un groupe, e son neutre. Montrez que si pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, alors G est un groupe abélien. Donnez un exemple d'un tel groupe ayant 4 éléments.

****22)** Soit A un anneau commutatif. On appelle élément idempotent tout élément $x \in A$ tel que $x^2 = x$.

L'ensemble $\{0\}$ est un anneau curieux : dans cet anneau, le neutre pour la multiplication est égal à celui pour l'addition. C'est le seul anneau vérifiant cette propriété, on l'appelle l'anneau nul.

a) Si A est le produit de deux anneaux B et C non nuls (voir un exercice ci-avant), montrez qu'il existe des éléments idempotents de A distincts de 0 et de 1.

On a donc montré qu'un anneau produit de deux anneaux non nuls contient des idempotents autres que 0 et 1.

b) On veut montrer une sorte de réciproque : si A est un anneau qui contient des idempotents autres que 0 et 1, alors il est isomorphe à un anneau produit de deux anneaux non nuls.

On suppose qu'il existe un élément $b \in A$ idempotent distinct de 0 et de 1. On pose $c = 1 - b$, $B = bA$ et $C = cA$.

▷ Montrez que c est idempotent et que $bc = 0$.

▷ Montrez que B et C sont stables pour l'addition et la multiplication de A. Déduisez-en que B et C sont des anneaux non nuls.

▷ Montrez que l'application $\varphi : A \to B \times C$ telle que $\varphi(x) = (bx, cx)$ est un isomorphisme d'anneaux.

▷ Les anneaux B et C sont-ils des sous-anneaux de A ?